

15. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, 则 $|2A^{-1}| =$ _____.

三、计算题 (本大题共 4 小题, 每小题 10 分, 共 40 分. 将解答的主要过程、步骤和答案填写在答题纸的相应位置上)

16. 求函数 $z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$ 的一阶偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

17. 计算 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

18. 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 7 \end{cases}$, 用导出组的基础解系表示其通解.

19. 应用格林公式计算曲线积分 $\oint_L xy^2 dy - x^2 y dx$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 取正向.

四、应用题 (本题 10 分, 将解答的主要过程、步骤和答案填写在答题纸的相应位置上)

20. 有一铸铁件, 它是由三条线: 抛物线 $y = \frac{1}{10}x^2$, $y = \frac{1}{10}x^2 + 1$ 与直线 $y = 10$ 围成的图形, 绕 y 轴旋转而成的旋转体, 计算其质量. (其中长度单位: cm , 铁的密度: $7.8 g/cm^3$)

数学 (一) (理工类) 模拟试卷 1

参考答案及评分标准

一、单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 选对得 3 分, 选错、未选或多选得 0 分)

1. D 2. D 3. A 4. C 5. B 6. C 7. D 8. B 9. B 10. A

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分. 填对得 5 分, 未填或填错得 0 分)

11. $\{(x, y) | y^2 > 2x - 1\}$ 12. e^2 13. $2x^5 + 2x$

14. $[-1, 1)$ 15. 2

三、计算题 (本大题共 4 题, 每题 10 分, 共 40 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确)

16. 解: 记 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + z - 1$ 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x}{2z+1} \quad \text{-----3分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2y}{2z+1} \quad \text{-----6分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4x \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{(2z+1)^2} = -\frac{8xy}{(2z+1)^3} \quad \text{-----10分}$$

17. 解: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

$$= \int \frac{2d\sqrt{x}}{1+x} \quad \text{-----4分}$$

$$= 2 \int \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} \quad \text{-----6分}$$

$$= 2 \arctan \sqrt{x} + C \quad \text{-----10分}$$

18. 解: 对增广矩阵做初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & -8 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{-----4分}$$

其同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = 2x_4 + 1 \\ x_2 = -x_3 + x_4 + 2 \end{cases}$ x_3, x_4 为自由元 -----6分

对应齐次方程组的基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -----8分

\therefore 通解为 $x = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \eta$ (k_1, k_2 为任意常数) -----10分

19. 解: $\oint_L xy^2 dy - x^2 y dx$

$$P(x, y) = -x^2 y \quad Q(x, y) = xy^2 \quad \text{-----1分}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 \quad \text{-----3分}$$

由格林公式有

$$\oint_L xy^2 dy - x^2 y dx = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{-----6分}$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \quad \text{-----7分}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho \quad \text{-----9分}$$

$$= \frac{\pi a^4}{2} \quad \text{-----10分}$$

四、应用题（本题 10 分）

20. 解：（1）作图（略）-----1分

（2）铸铁件体积计算 取 y 为积分变量-----2分

体积元素（外）： $dV_1 = \pi 10 y dy$ ，积分区间为 $[0, 10]$ -----4分

体积元素（内）： $dV_2 = \pi 10 (y - 1) dy$ ，积分区间为 $[1, 10]$ -----6分

$V = V_1 - V_2$ -----7分

$$= \int_0^{10} \pi 10 y dy - \int_1^{10} \pi 10 (y - 1) dy \quad \text{-----8分}$$

$$= 95\pi \quad \text{-----9分}$$

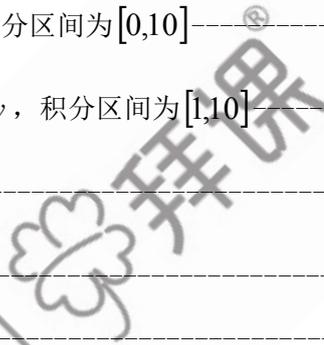
（3）铸铁件质量计算

$$m = \rho V = 7.8 \times 95\pi = 741\pi (\text{g})$$

答：铸铁件的质量为 $741\pi \text{ g}$ -----10分



精通教育
JINGTONG Education



14. 微分方程: $\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x+1} = (x+1)^{\frac{3}{2}}$ 满足 $y|_{x=0} = 0$ 的特解为_____.

15. 已知 A 为三阶矩阵且 $|A| = 3$, 则 $|A^*| =$ _____.

三、计算题 (本大题共 4 小题, 每小题 10 分, 共 40 分. 将解答的主要过程、步骤和答案填写在答题纸的相应位置上)

16. 已知 $z = f(x + \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x})$, 其中 $f(u, v)$ 可微, 求 dz .

17. 求曲线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围图形的面积.

18. 求函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - 3$ 的极值点和极值.

19. 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ 的极大无关组, 并将其余向量

用此极大无关组线性表示.

四、应用题 (本题 10 分, 将解答的主要过程、步骤和答案填写在答题纸的相应位置上)

20. 在鱼腹梁设计中, 需要计算抛物线 $y = ax^2$ 在 $x = -b$ 至 $x = b$ 之间的弧长, 试利用定积分中弧长的计算公式 $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ 加以确定.

数学 (一) (理工类) 模拟试卷 2

参考答案及评分标准

一、单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 选对得 3 分, 选错、未选或多选得 0 分)

1. D 2. A 3. C 4. B 5. B 6. D 7. D 8. C 9. C 10. A

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分. 填对得 4 分, 未填或填错得 0 分)

11. $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$ 12. $3x + 2y - 6\sqrt{2} = 0$

13. $dz = 2x \sin 2y dx + 2x^2 \cos 2y dy$ 14. $y = -2(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(x+1)^3$

15. 9

三、计算题 (本大题共 4 题, 每题 10 分, 共 40 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确)

16. 解: $z = f\left(x + \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 - \frac{1}{x^2} f_2 \text{-----} 3 \text{分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} f_1 + f_2 \text{-----} 6 \text{分}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \text{-----} 8 \text{分}$$

$$= \left(f_1 - \frac{1}{x^2} f_2\right) dx + \left(-\frac{1}{y^2} f_1 + f_2\right) dy \text{-----} 10 \text{分}$$

17. 解: (1) 解方程组 $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$ 得交点的坐标为 $(2, -2)$, $(8, 4)$ ----- 2 分

(2) 取 y 为积分变量, 积分区间为 $[-2, 4]$ ----- 4 分

$$\text{面积元素 } dA = \left(y + 4 - \frac{1}{2}y^2\right) dy \text{-----} 6 \text{分}$$

(3) 所求图形面积为

$$A = \int_{-2}^4 \left(y + 4 - \frac{1}{2}y^2\right) dy \text{-----} 8 \text{分}$$

$$= \left[y^2 + 4y - \frac{1}{6}y^3\right]_{-2}^4 = 18 \text{-----} 10 \text{分}$$

18. 解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ----- 1 分

(2) $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ ----- 4 分

令 $f'(x) = 0$, 得驻点为 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ ----- 6 分

(3) 列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	----- 8 分
$f(x)$	↑	$-\frac{4}{3}$	↓	-12	↑	

(4) 极大点为 $x = -1$, 极大值为 $f(-1) = -\frac{4}{3}$, ----- 10 分

极小点为 $x = 3$, 极小值为 $f(3) = -12$

19. 解:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -14 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{-----4分}$$

α_1, α_2 是一个极大无关组 -----6分

$$\text{且有} \begin{cases} a_3 = \frac{3}{2}a_1 - \frac{7}{2}a_2 \\ a_4 = a_1 + 2a_2 \end{cases} \quad \text{-----10分}$$

四、应用题（本题 10 分）

20. 解：(1) 抛物线 $y = ax^2$, $y' = (ax^2)' = 2ax$ -----2分

(2) $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \sqrt{1 + (2ax)^2}$ -----4分

(3) $s = \int_{-b}^b \sqrt{1 + [2ax]^2} dx$ -----6分

$$= \int_{-b}^b \sqrt{1 + 4a^2x^2} dx$$

$$= b\sqrt{1 + 4a^2b^2} + \frac{1}{2a} \ln(2ab + \sqrt{1 + 4a^2b^2}) \quad \text{-----10分}$$



精通教育 | 拜课®
JINGTONG Education