精通教育 2020 高等数学模拟题（一）参考答案

一、 单项选择题 (本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分)

1. 答案：D.

解析：$\begin{cases}4-x^2\geq 0\\ x^2-4\geq 0\end{cases}\Rightarrow x=2,x=-2\Rightarrow\{-2,2\}$

2. 答案：D.

解析：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}}\ln(2\sin 2x)=0$.

3. 答案：C.

解析：$\because y'=\left(e^x\sin x\right)'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$，

$\therefore y''=\left[e^x(\sin x+\cos x)\right]'=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$，

$\therefore y'''=\left(2e^x\cos x\right)'=2e^x\cos x-2e^x\sin x=2e^x(\cos x-\sin x)$.

4. 答案：B.

解析：$\because y'=2x$，$\therefore k_{切}=y'|_{x=1}=2$，$k_{法}=-\dfrac{1}{k_{切}}=-\dfrac{1}{2}$，故所求法线方程为

$y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$，即 $y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}$.

5. 答案：A.

解析：

$\int f(x)dx=e^{-2x}+C\Rightarrow f(x)=-2e^{-2x}\Rightarrow f'(x)=4e^{-2x}\Rightarrow f'(\ln x)=4e^{-2\ln x}=\dfrac{4}{x^2}$

原式$=\int\dfrac{4}{x^3}dx=-\dfrac{2}{x^2}+C$.

6. 答案：A.

解析：$F(x,y,z)=e^z-xyz\Rightarrow\begin{cases}F_x'=-yz\\ F_z'=e^z-xy\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{yz}{e^z-xy}$.

7. 答案：B.

解析：B 项为等比级数，公比 q 的绝对值小于 1，故收敛.

8. 答案：【数一】A.

解析：

$F(x,y,z)=x^2+y^2-z\Rightarrow\begin{cases}F_x'=2x\\ F_y'=2y\\ F_z'=-1\end{cases}$，将点 $(1,2,5)$ 代入，得 $\begin{cases}F_x'=2\\ F_y'=4\\ F_z'=-1\end{cases}$，故切线方程为

$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0\Rightarrow 2x+4y-z=5$.

【数二】B

解析：

$f(x)$ 在 x_0 处不连续，是指连续性的三条件之一不满足，因此 C、D 选项都不对；由于可导必连续，则不连续必不可导，所以 A 不对，故选 B.

9. 答案：A.

解析：$\dfrac{dy}{dx}=2xy\Rightarrow\dfrac{1}{y}dy=2xdx\Rightarrow\int\dfrac{1}{y}dy=\int 2xdx\Rightarrow\ln|y|=x^2+C_1\Rightarrow y=Ce^{x^2}$.

10. 答案：A.

解析：$|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$，故选 A；

$(2A)^{-1}=\dfrac{1}{2}A^{-1}$，B 不对；

$|2A|=2^n|A|$，C 不对；

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, D 不对.

二、填空题 (本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分. 填对得 4 分，未填或错填得 0 分)

11. 答案：-1.

解析：$\because\lim\limits_{x\to 0}(1-kx)^{\frac{1}{x}}=e^{-k}$，$f(0)=e$，$\therefore\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)\Rightarrow e=e^{-k}\Rightarrow k=-1$.

12. 答案：e^2.

解析：$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+2}{x})^{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{x-2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot(x-2)}=e^2$.

13. 答案：$(-3,1)$.

解析：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)-2^{n+1}}}{\dfrac{1}{n-2^n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n-2^n}{(n+1)-2^{n+1}}\right|=\dfrac{1}{2}$，从而 $R=\dfrac{1}{\rho}=2\Rightarrow(-3,1)$.

14. 答案：$\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$.

解析：矩阵乘法计算即可.

15. 答案：2π.

解析：利用定积分的几何意义.

三、计算题(本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分. 解答过程、步骤和答案必须完整正确)

16. 解：令

$$\begin{cases}u=2x+e^y\\ v=\dfrac{y^2}{x}\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=2xf(u,v)+x^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=2xf(u,v)+2x^2f_u'-y^2f_v'$$

$$\therefore\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=x^2e^yf_u'+2xyf_v'$$

17. 解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt}{\sin^4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^3}{4x^3}=\dfrac{1}{2}$.

18. 【数一】解：

令 $x=r\cos\theta\quad y=r\sin\theta$ 则

$$\iint\limits_D\frac{y}{x}d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2r\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta\frac{r^2}{2}\Big|_1^2d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta d\theta=\frac{3}{2}\left[-\ln|\cos\theta|\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{3}{4}\ln2.$$

【数二】解：

通过联立函数 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$，可得它们相交于点 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$，

所以体积 $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2x-\sin^2x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2xdx=\dfrac{\pi}{2}\sin2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{2}$.

19. 解：

增广矩阵 $(A|b)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\0&-1&1&2&-9\\0&-2&2&2&-22\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\0&1&-1&-2&9\\0&1&-1&-1&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\0&1&-1&-2&9\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&-8\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$

对应齐次同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2-x_3=0\\x_4=0\end{cases}$，令 $x_3=1$，得 $\xi=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$；

对应非齐次同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_3=-8\\x_2-x_3=13\\x_4=2\end{cases}$，令 $x_3=0$，得 $\eta=\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix}$.

故原方程组通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\xi+\eta=k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix}\ (k\in R)$.

四、应用题(本题 10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确)

20. 【数一】解：设底边长为 x，直柱体高为 y，则 $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2y$，$y=\dfrac{4V}{\sqrt{3}x^2}$，

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+3xy=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+\dfrac{4\sqrt{3}V}{x}$，$S'=\sqrt{3}x-\dfrac{4\sqrt{3}V}{x^2}$. 令 $S'=0$ 得 $x=\sqrt[3]{4V}$，经验证

$x=\sqrt[3]{4V}$ 为极小值点，故在实际问题中，也为最小值点，即底边为$\sqrt[3]{4V}$ 时，表面积最小.

【数二】解：（1）设销售量为 y，价格为 x，因为二者呈现一次函数关系，则满足 $y=kx+b$，

带入两点

$$\begin{cases}20k+b=360\\25k+b=210\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}k=-30\\b=960\end{cases}$，即 $y=-30x+960$

（2）利润函数：$L=xy-16y=-30x^2+1440x-15360$

（3）$L'=-60x+1400=0$ 解得 $x=24$

$L''=-60<0$ 为极大值

即当价格定位 24 元时能使每月利润最大，最大利润为 $L(24)=1920$ 元.

精通教育 2020 高等数学模拟题（二）参考答案

一、 单项选择题 (本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分)

1. 答案：D．

解析：$\arcsin\dfrac{x}{3}$ 的定义域是 $[-1,1]$，即 $-1\le\dfrac{x}{3}\le1$，即 $-3\le x\le3$；偶次根号下的式子需大于等于 0，即 $2-x\ge0\Rightarrow x\le2$；分式分母不能为 0，即 $\begin{cases}x-2\ne0\\ \ln x\ne0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ne2\\ x\ne1\end{cases}$；对数函数 $\ln x$ 真数需大于 0，即 $x>0$；综上，得 $x\in(0,1)\cup(1,2)$.

2. 答案：A．

解析：$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{1}{x}=1$

3. 答案：C．

解析：$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x\mathrm{d}x=\cot x\mathrm{d}x$.

4. 答案：D．

解析：由题意知直线 l 的斜率 $k=0$.因为 $y=x-\mathrm{e}^x$，所以 $y'=1-\mathrm{e}^x$.令 $y'=0$，得 $x=0$，将其代入 $y=x-\mathrm{e}^x$ 得 $y=-1$.

5. 答案：C．

解析：$\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C\Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^x\Rightarrow\int f(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$.

6. 答案：D．

解析：

$\because\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}+y^x\ln y,\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x+xy^{x-1}$ $\therefore\mathrm{d}z=(yx^{y-1}+y^x\ln y)\mathrm{d}x+(x^y\ln x+xy^{x-1})\mathrm{d}y$.

7. 答案：A．

解析：对于 A 选项来说，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+1/n\right)}{1/n}=1$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故由比较判断法极限形式知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n})$ 发散，所以不收敛.

8. 答案：【数一】D．

解析：

将直线的点向式方程改写成参数式方程，即 $\begin{cases}x=-2+3t\\ y=2-t\\ z=-1+2t\end{cases}$，因交点在直线上，所以满足直线的参数式方程，设交点坐标为 $(-2+3t_0,2-t_0,-1+2t_0)$，同时交点在平面上，满足平面方程，将 $(-2+3t_0,2-t_0,-1+2t_0)$ 代入，得

$2(-2+3t_0)+3(2-t_0)+3(-1+2t_0)-8=0\Rightarrow t_0=1$，则交点坐标为 $(1,1,1)$.

【数二】D．

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(\sin x^2)\cdot(\sin x^2)'=f'(\sin x^2)\cdot\cos x^2\cdot(x^2)'=2x\cos x^2f'(\sin x^2)$.

9. 答案：A．

解析：将原式化为 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{3}{x}\Rightarrow p(x)=\dfrac{1}{x},q(x)=\dfrac{3}{x}$

$\therefore y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}(\int\dfrac{3}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\dfrac{1}{x}(3x+C)=3+\dfrac{C}{x}$.

10. 答案：A．

解析：$\left|(AB)^{-1}\right|=\dfrac{1}{|AB|}=\dfrac{1}{|A||B|}$，又 $\because|A|=6$，$|B|=-3$，$\therefore$ 原式 $=-\dfrac{1}{18}$.

二、填空题 (本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分. 填对得 4 分，未填或错填得 0 分)

11. 答案：3．

解析：由 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}$ 存在知 $\lim\limits_{x\to2}[f(x)-3]=0$，从而 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=3$，另一方面，由 $f(x)$ 在 $x=2$ 时连续，根据连续定义得 $f(2)=\lim\limits_{x\to2}f(x)=3$.

12. 答案：$\ln2$．

解析：左边：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x+a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{2ax}{x+a}}=\mathrm{e}^{2a}$，由 $\mathrm{e}^{2a}=4\Rightarrow a=\ln2$.

13. 答案：$\dfrac{2}{3}$．

解析：收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{|a_n|}{2^n}}{\dfrac{|a_{n+1}|}{2^{n+1}}}=\dfrac{2}{3}$.

14. 答案：$|A|^4$.

解析：$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}=|A|^4$.

15. 答案：-1.

解析：行列式计算即可.

三、计算题(本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分．解答过程、步骤和答案必须完整正确)

16. 解：由题意可知 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$，

$$\therefore \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{-x}{x^2+y^2}\ \therefore y\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-x\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2}=1.$$

17. 解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left(3\sin t+t^2\cos\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t}{(1+\cos x)\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left(3\sin t+t^2\cos\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t}{\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(3\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2}.$$

18. 解：【数一】 $P=x+y-1,Q=x-y+1,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$.

所以曲线积分与路径无关，引入点 $O(\frac{\pi}{2},0)$，则

$$\begin{aligned}\int_L(x+y-1)\mathrm{d}x+(x-y+1)\mathrm{d}y&=\int_{\overline{AO}}(x+y-1)\mathrm{d}x+(x-y+1)\mathrm{d}y\\&+\int_{\overline{OB}}(x+y-1)\mathrm{d}x+(x-y+1)\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\mathrm{d}x+\int_0^1(\frac{\pi}{2}-y+1)\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

【数二】

$$\int2x\cos^2x\mathrm{d}x=\int x(1+\cos2x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x+\int x\cos2x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\sin2x$$

$$=\int x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left(x\sin2x-\int\sin2x\mathrm{d}x\right)=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sin2x+\frac{1}{4}\cos2x+C.$$

19. 解：

$$B=(A|\mathrm{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&-1&-1&-2&1\\2&2&0&-1&-2&1\\5&5&-3&-4&-8&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$，对应齐次方程组为：

$\begin{cases}x_1+x_2-\frac{1}{2}x_4-x_5=0\\x_3+\frac{1}{2}x_4+x_5=0\end{cases}$，令自由未知量 x_2,x_4,x_5 为 $(1,0,0)^T$，$(0,1,0)^T$，$(0,0,1)^T$，则得基础解

系：$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

所以对应齐次通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3(k_1,k_2,k_3\in R)$.

对应非齐次方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2-\frac{1}{2}x_4-x_5=\frac{1}{2}\\x_3+\frac{1}{2}x_4+x_5=-\frac{1}{2}\end{cases}$

令自由未知量 x_2,x_4,x_5 全为0，得非齐次特解 $\eta=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}$.

所以非齐次通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3+\eta(k_1,k_2,k_3\in R)$.

四、应用题(本题 10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确)

【数一】解：设剪去的小正方形的边长为 x cm，则纸箱的底面边长为 $(96-2x)$ cm，高为 x cm，容积 $V=(96-2x)^2x$，所以

$V'=2(96-2x)(-2)x+(96-2x)^2=-4x(96-2x)+(96-2x)^2=(96-2x)(96-6x)$，令 $V'=0$ 得 $x_1=16$，$x_2=48$（舍），由于实际问题最大值一定存在，所以当剪去的小正方形的边长为16 cm时，纸箱的容积最大.

【数二】

解：由需求函数 $Q=6750-50p$ 可得，价格函数为 $p=135-0.02Q$，则收益函数为 $R=p\cdot Q=(135-0.02Q)\cdot Q=135Q-0.02Q^2$；则利润函数为

$L=R-C=(135Q-0.02Q^2)-(12000+0.025Q^2)=135Q-0.045Q^2-12000$，则边际利润函数为 $L'=135-0.09Q$；另 $L'=0$，则 $Q=1500$；由于 $L''=-0.09<0$，故 $Q=1500$ 为极大值点，因实际问题，即为最大值点. 所以，当产量 $Q=1500$ 时，利润最大；此时价格 $p=135-0.02Q=105$. 将 $Q=1500, p=105$ 代入利润函数，可得：最大利润 $L=89250$.

精通教育 2020 高等数学模拟题（三）参考答案

一、 **单项选择题 (本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分)**

1. 答案：B.

解析：$\begin{cases} -1\le 2-x\le 1 \\ \dfrac{2-x}{2+x}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\le x\le 3 \\ -2<x<2 \end{cases} \Rightarrow [1,2)$.

2. 答案：B.

解析：根据导数的通式得

$$\lim_{h\to\infty} hf\left(x_0-\frac{1}{h}\right)=\lim_{h\to\infty}\frac{f\left(x_0-\frac{1}{h}\right)-f(x_0)}{\frac{1}{h}}=\frac{-1-0}{1}f'(x_0)=-f'(x_0)=-1\ .$$

3. 答案：B.

解析：令 $\sqrt{x}=t$，则 $\int\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{f(t)}{t}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int f(t)\mathrm{d}t=2\mathrm{e}^{t^2}+C=2\mathrm{e}^x+C$.

4. 答案：A.

解析：

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{|2x-1|}{4x^2-1}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\dfrac{|2x-1|}{4x^2-1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\dfrac{1-2x}{(2x+1)(2x-1)}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}-\dfrac{1}{2x+1}=-\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\dfrac{|2x-1|}{4x^2-1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\dfrac{2x-1}{(2x+1)(2x-1)}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

所以 $x=\frac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

5. 答案：B.

解析：按第一行展开：

$$\begin{vmatrix}2x & -x & 1 & 3\\ 2 & 3x & -1 & 2\\ 1 & 2 & -x & 1\\ 1 & 2 & 3 & x\end{vmatrix}=2x\begin{vmatrix}3x & -1 & 2\\ 2 & -x & 1\\ 2 & 3 & x\end{vmatrix}-(-x)\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & -x & 1\\ 1 & 3 & x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 3x & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & x\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & 3x & -1\\ 1 & 2 & -x\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

其中第 1、3、4 项都没有 x^3 的因子，所以只需分析第二项.

因为第二项 $-(-x)\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & -x & 1\\ 1 & 3 & x\end{vmatrix}$ 的行列式中只有主对角线上的元素的乘积是 x^2 项，所以行列式展开式含 x^3 项的系数是 -2.

6. 答案：A.

解析：令 $t-x=u$

则 $f(x)=\int_0^x\sin(t-x)\mathrm{d}t=\int_{-x}^0\sin u\mathrm{d}u=-\int_0^{-x}\sin u\mathrm{d}u$,

$f'(x)=-\sin(-x)\cdot(-x)'=-\sin x$, 故选 A.

7. 【数一】答案：C.

解析：平面与直线垂直，则平面的法向量与直线的方向向量平行，可取 $\vec{n}=\vec{s}=\{1,-3,5\}$，根据点法式确定平面方程为

$(x-3)-3(y+4)+5(z-1)=0\Rightarrow x-3y+5z-20=0$.

【数二】答案：D.

解析：$\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{x}{2})^{\frac{3}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}(-\frac{x}{2})\cdot\frac{3}{x}}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{2}{x}\cdot x}=\mathrm{e}^{-2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{2x+100}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot(2x+100)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}(4+\frac{200}{x})}=\mathrm{e}^4$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{4\cdot\frac{x}{2}}=[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}]^4=\mathrm{e}^4$

8. 答案：B.

解析：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{1/n^2}=\frac{1}{2}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由比较判断法极限形式知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ 收敛.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\arctan\frac{2}{n}}{1/n}=2$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故由比较判断法极限形式知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n}$ 发散.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)(n+4)}{1/n^2}=1$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由比较判断法极限形式知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$ 收敛.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}=0<1$，所以用比值判别法知，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛.

9. 答案：C.

解析：
$$\begin{aligned}&|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=|\alpha_3,\ \alpha_2,\ \alpha_1,\ \beta_1|+|\alpha_3,\ \alpha_2,\ \alpha_1,\ \beta_2|\\&=-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2|\\&=-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|+|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|\\&=n-m\end{aligned}$$

10. 答案：C.

解析：因原方程组阶数为 2，通解中应包含两个任意常数，A 不对；又因特解中不含任意常数，B 不对；$y=Cx+\frac{x^3}{6}$ 满足原方程，应该选 C .

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分. 填对得 4 分，未填或错填得 0 分)

11. 答案：$\frac{y+e^{y-x}}{e^{y-x}-x}dx$

解析：（1）两边同时求导得

$y+xy'=e^{y-x}\cdot(y'-1)$，即 $y+xy'=y'e^{y-x}-e^{y-x}$，

$(e^{y-x}-x)y'=y+e^{y-x}$；

解方程得 $y'=\frac{y+e^{y-x}}{e^{y-x}-x}$.

所以 $dy=\frac{y+e^{y-x}}{e^{y-x}-x}dx$.

12. 【数一】答案 $y=e^{2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)$

解析：原式对应的特征方程为 $r^2-4r+5=0\Rightarrow r_1=2+i,r_2=2-i$

得到对应的齐次方程通解为 $y=e^{2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)$.

【数二】答案：$-\frac{1}{2}e$.

解析：令

$$\begin{cases}f'_x=2e^{2x}(x+2y+y^2)+e^{2x}=0,\\ f'_y=e^{2x}(2+2y)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\ y=-1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}f''_{xx}=2e^{2x}(2x+4y+2y^2+2),\\ f''_{xy}=4e^{2x}(1+y)\\ f''_{yy}=2e^{2x}\end{cases},\Rightarrow\begin{cases}A=f''_{xx}\big|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=2e,\\ B=f''_{xy}\big|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=0\\ C=f''_{yy}\big|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=2e\end{cases},\Rightarrow B^2-AC=-4e^2<0$$

又 $A>0,\therefore$ 极小值为 $f(x,\ y)\big|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=-\frac{1}{2}e$.

13. 答案 $[-1,1)$.

解析：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{n+2}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right|=1$，所以收敛半径为 1.

当 $x=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 发散，当 $x=-1$ 时，得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 收敛.

于是收敛域为 $[-1,1)$.

14. 答案：$\dfrac{1}{3}$

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin^2 t\mathrm{d}t}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

15.【数一】答案：$\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解析：由题可知在积分区域为 $\begin{cases}0\le y\le \dfrac{1}{4}\\ y\le x\le \sqrt{y},\end{cases}$ 与 $\begin{cases}\dfrac{1}{4}\le y\le \dfrac{1}{2}\\ y\le x\le \dfrac{1}{2},\end{cases}$ 交换积分次序得为

$\begin{cases}0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ x^2\le y\le x,\end{cases}$ 从而

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

【数二】答案：$-\dfrac{1}{6}$

解析：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=-\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2(1+x^2)}=-\dfrac{1}{6}$.

三、计算题(本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分. 解答过程、步骤和答案必须完整正确)

16. 解：令 $x+1=t$，

有 $\int_{-2}^{0} f(x+1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}(x+1)\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$.

17. 解：设 $u=xy, v=\dfrac{y}{x}$

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_u'-\dfrac{y}{x^2}f_v'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_u'+y(xf_{uu}''+\frac{1}{x}f_{uv}'')-\frac{y}{x^2}(xf_{vu}''+\frac{1}{x}f_{vv}'')-\frac{1}{x^2}f_v'$$

$$=f_u'+xyf_{uu}''-\frac{y}{x^3}f_{vv}''-\frac{1}{x^2}f_v'.$$

18.【数一】解：设 $A=\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，则 $A=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故

$f(x,y)=x+\iint\limits_D yf(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=x+Ay$. 即 $f(x,y)=x+Ay$.

两边求二重积分，则 $A=\iint\limits_D (x+Ay)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{1}(x+Ay)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}A+\dfrac{1}{4}$,

从而 $A=\dfrac{1}{2}$，故 $f(x,y)=x+\dfrac{1}{2}y$.

【数二】解：$x=\dfrac{1}{4y}(y^4-1)$

将原式化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\dfrac{1}{y}x=y^2\Rightarrow p(y)=\dfrac{1}{y}, q(y)=y^2$

$$\therefore x=\mathrm{e}^{-\int p(y)\mathrm{d}y}\left[\int q(y)\mathrm{e}^{\int p(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left(\int y^2\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)=y^{-1}\cdot\left(C+\frac{1}{4}y^4\right)$$

由初始条件得到 $C=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow x=\dfrac{1}{4y}(y^4-1)$.

19. 解：
$$A=\begin{pmatrix}1&2&-3&-1\\2&3&1&3\\-1&-2&3&1\\2&3&3&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-3&-1\\0&-1&7&5\\0&0&0&0\\0&0&2&-12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-3&-1\\0&1&-7&-5\\0&0&1&-6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 得与原方程组同解方程组为：

$$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3-x_4=0\\ x_2-7x_3-5x_4=0\\ x_3-6x_4=0\end{cases}$$

令自由未知量 $x_4=1\Rightarrow x_1=-75, x_2=47, x_3=6$

所以通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-75\\47\\6\\1\end{pmatrix}(k\in R)$

四、应用题(本题 10 分．解答过程、步骤和答案必须完整、正确)

20．【数一】解：设矩形场地正面长度为 x 米，相邻边长为 y 米，则 $y=\dfrac{150}{x}$，

总造价 $F=6x+3x+3y+3y=9x+6\cdot\dfrac{150}{x}=9x+\dfrac{900}{x}$，

$F'=9-\dfrac{900}{x^2}$，令 $F'=0$，在 $x>0$ 范围内得唯一驻点 $x=10$，

又 $F''(10)=\dfrac{1800}{10^3}=1.8>0$，故 $x=10$ 时，F 取得最小值，此时 $y=15$，

故当矩形的长和宽分别为 15 米和 10 米时，总造价最低．

【数二】解：由 $Q=80-4P\Rightarrow P=20-\dfrac{1}{4}Q$

$C=40+3Q$

$L=PQ-C=-\dfrac{Q^2}{4}+17Q-40$

$L'=-\dfrac{1}{2}Q+17\Rightarrow Q=34$

$L''=-\dfrac{1}{2}<0$ 为极大值

$L(34)=249$

故当产量为 34 时，工厂日总利润最大，最大利润为 249 元．

精通教育 2020 高等数学模拟题（四）参考答案

一、 单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分)

1. 答案：B.

解析：由题可知：

$$0\le x\le 3\Rightarrow 1\le x+1\le 4\text{，则}\begin{cases}1\le x+\dfrac{1}{2}\le 4\\ 1\le x^2\le 4\end{cases}.\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{7}{2}\\ -2\le x\le -1\text{或}1\le x\le 2\end{cases}\Rightarrow 1\le x\le 2.$$

2. 答案：B.

解析：因为函数在 $x=0$ 点处连续，所以

$$f(0)=k=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{4}\Rightarrow k=\frac{1}{4}.$$

3. 答案：C.

解析：$\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\int f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2)=-\dfrac{1}{2}\sin(1-x^2)+C$.

4. 【数一】答案：A.

解析：平面与直线垂直，则法向量与方向向量平行，可取 $\vec{n}=\vec{s}=\{3,1,4\}$，根据点法式确定平面方程 $3(x+1)+(y-2)+4(z-2)=0\Rightarrow 3x+y+4z-7=0$.

【数二】答案：B.

解析：因为 $y=2+\ln x$，所以 $y'|_{x=\mathrm{e}}=\dfrac{1}{x}\Big|_{x=\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，即切线斜率 $k_{\text{切}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

所以法线斜率 $k_{\text{法}}=-\mathrm{e}$.

5. 答案：A.

解析：由题中的式子变形得

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln x}{x}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x,$$

记 $\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=A$ (常数)，则在上式两端作 $[1,\mathrm{e}]$ 上的积分，得

$$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x-\int_1^{\mathrm{e}}A\mathrm{d}x,\text{即 }A=\frac{1}{2}-A(\mathrm{e}-1),$$

解得 $A=\dfrac{1}{2\mathrm{e}},\therefore f(x)=\ln x-\dfrac{x}{2\mathrm{e}}$，故选 A.

6. 答案：A.

解析：（A）$(A^2)^{-1}=(AA)^{-1}=A^{-1}A^{-1}=(A^{-1})^2$，故 A 对；（B）不成立，例：$B=-A, A+B$ 不可逆；（C）不成立，若 $AB\ne BA$, 则 $AB-BA\ne 0$；（D）不成立，$(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$，不等于 kA^{-1}.

7. 答案：B.

解析：利用行列式的性质.

$$|B|=|\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_3,5\alpha_3|$$
$$=5|\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3|$$
$$=5|\alpha_1-3\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3|$$
$$=5|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|$$
$$=20.$$

8. 答案：C.

解析：因为 $\left|(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+k}}\right|=\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+k}}\le\dfrac{1}{2}\left(a_n{}^2+\dfrac{1}{n^2+k}\right)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+k}$ 都收敛，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}\left(a_n{}^2+\dfrac{1}{n^2+k}\right)$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+k}}$ 绝对收敛.故选 C.

9. 答案：C.

解析：将原式可化为 $x'-\dfrac{1}{y}x=y^2\Rightarrow p(y)=-\dfrac{1}{y},q(y)=y^2$

$$\therefore x=\mathrm{e}^{-\int p(y)\mathrm{d}y}[\int q(y)\mathrm{e}^{\int p(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C]=\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{y}\mathrm{d}y}(\int y^2\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C)=y(\frac{1}{2}y^2+C)$$

$$=\frac{y^3}{2}+Cy.$$

10. 答案：B.

解析：两边同时求导得 $y'=y+xy'+\mathrm{e}^x$，即 $(1-x)y'=y+\mathrm{e}^x$；

解方程得 $y'=\dfrac{y+\mathrm{e}^x}{1-x}$.因为 $y=xy+\mathrm{e}^x$，所以 $\mathrm{e}^x=y-xy$，

所以 $y'=\dfrac{y+\mathrm{e}^x}{1-x}=\dfrac{y+y-xy}{1-x}=\dfrac{2y-xy}{1-x}$.

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．填对得 4 分，未填或错填得 0 分）

11. 【数一】答案：$y=1$.

解析：$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=1$，$y=1$ 是水平渐近线.

【数二】答案：$-\dfrac{1}{2}x\csc^2 x+\dfrac{1}{2}\cot x+C$

解析：原式 $=\int\dfrac{x}{\sin^3 x}\mathrm{d}\sin x=\int x\mathrm{d}\dfrac{1}{-2\sin^2 x}=-\dfrac{x}{2\sin^2 x}+\int\dfrac{1}{2\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$=-\dfrac{x}{2\sin^2 x}-\dfrac{1}{2}\cot x+C=-\dfrac{1}{2}x\csc^2 x-\dfrac{1}{2}\cot x+C$

12. 答案：$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

解析：利用比值判别法，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+1}}{3^{n+1}}\cdot\dfrac{3^n}{x^{2n-1}}\right|=\dfrac{1}{3}x^2<1$，

所以收敛区间为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

当 $x=-\sqrt{3}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}(-\sqrt{3})^{2n-1}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 发散，

当 $x=\sqrt{3}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}(\sqrt{3})^{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 发散，

所以收敛域为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

13. 答案：【数一】 1

解析：$OB:x=0,BA:y=1$

$\int_L x^2\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0+\int_0^1 1\mathrm{d}x=1.$

【数二】 $\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{x^2y}(2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y)$.

解析：$\because\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{x^2y}2xy=2xy\mathrm{e}^{x^2y},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{x^2y}x^2=x^2\mathrm{e}^{x^2y}$

$\therefore\mathrm{d}z=2xy\mathrm{e}^{x^2y}\mathrm{d}x+x^2\mathrm{e}^{x^2y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{x^2y}(2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y)$

14. 答案：-1

解析：$\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}f(x)=xf(x)|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-1$

15. 答案：【数一】 $y=(C_1\sin x+C_2\cos x)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x$

解析：对应齐次方程 $y''-2y'+2y=0$ 其对应的特征方程：

$r^2-2r+2=0\Rightarrow r_1=1+i,r_2=1-i$

得到对应的齐次方程通解 $y=\mathrm{e}^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$

$f(x)=\mathrm{e}^x$，因为 $\lambda=1$ 不是齐次方程的特征根，所以 $k=0$，

所以特解形式为 $y^*=a\mathrm{e}^x$，

将特解形式代入原方程得到 $a=1\Rightarrow y=(C_1\sin x+C_2\cos x)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x$.

【数二】1

解析：由于 $x\to 0$ 时，$\arcsin x\sim\tan x\sim x$，所以

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-1)\arcsin x}{\tan x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1.$

三、计算题(本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分．解答过程、步骤和答案必须完整正确)

16. 解：$\int\dfrac{\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\ln(\tan x)}{\tan x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\ln(\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}(\tan x)=$

$\int\ln(\tan x)\mathrm{d}[\ln(\tan x)]=\dfrac{1}{2}\ln^2(\tan x)+C.$

17. 解：令 $t=x^2-y^2$，$v=\mathrm{e}^y$，

$\therefore \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-2yf_t' +e^y f_v'$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2f_t'-2y\left(\frac{\partial f_t'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial f_t'}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+e^y\cdot f_v'+e^y\left(\frac{\partial f_v'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial f_v'}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

$=-2f_t'+4y^2 f_{tt}'' -4ye^y f_{vt}'' +e^{2y} f_{vv}''+e^y\cdot f_v'.$

18. 【数一】 解：$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(x^2+y^2)dy=\int_0^1 (x^2y+\frac{1}{3}y^3)\Big|_0^{x^2}dx$

$$=\int_0^1 (x^4+\frac{1}{3}x^6)dx=\frac{26}{105}.$$

【数二】解：$\int_0^x [2f(t)-t]dt=f(x)-1$ 等式两边分别对 x 求导，得 $2f(x)-x=f'(x)$，

且有 $f(0)=1$，令 $f(x)=y$，即 $y'-2y=-x\Rightarrow p(x)=-2,q(x)=-x$

$\therefore y=e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C]=e^{-\int -2dx}[\int -x\cdot e^{\int -2dx}dx+C]=$

$e^{2x}(\int -xe^{-2x}dx+C)=e^{2x}(\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}+C)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+Ce^{2x}$

又 $f(0)=1$，故 $C=\frac{3}{4}$，

所以所求函数 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^{2x}$

即 $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^{2x}$.

19. 解：方程变形为 $\begin{cases}-x_3+2x_1+\lambda x_2=1,\\ x_3+\lambda x_1-x_2=2,\\ -5x_3+4x_1+5x_2=-1,\end{cases}$ 则有

$$B=(A\,|\,b)\to\begin{pmatrix}1&-2&-\lambda&-1\\1&\lambda&-1&2\\-5&4&5&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&-\lambda&-1\\0&\lambda+2&\lambda-1&3\\0&-6&5-5\lambda&-6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&-\lambda&-1\\0&6&5\lambda-5&6\\0&0&(1-\lambda)(4+5\lambda)&6(1-\lambda)\end{pmatrix}$$

当 $\lambda=-\frac{4}{5}$ 时，方程组无解；

当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq-\frac{4}{5}$ 时，方程组有唯一解；

当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多解，且 $B\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，其同解方程组为 $\begin{cases}x_3=x_2+1,\\x_1=1\end{cases}$，令自由

未知元 $x_2=1$，得对应齐次基础解系 $\xi=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，令 $x_2=0$，得非齐次特解 $\eta=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

所以通解为 $x=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},k\in R.$

四、应用题(本题 10 分．解答过程、步骤和答案必须完整、正确)

20. 【数一】解：设桶底半径为 r，桶高为 h，则铁桶体积 $16\pi=\pi r^2h$，即 $h=\frac{16}{r^2}$.

设所使用材料即铁桶表面积为 y，则 $y=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{32\pi}{r}$.

所以 $y'=4\pi r-\frac{32\pi}{r^2}$. 令 $y'=0$，得唯一驻点 $r=2$.

又因为 $y''(2)=12\pi>0$，所以 $r=2$ 为极小值点，即最小值点.

此时 $h=4$.

所以桶底半径与桶高是 $1:2$ 时，用料最省.

【数二】解：设分 x 批生产，则每批生产 $\frac{3000}{x}$ 件，订货费和库存费之和为 y 元.

则：$y=30x+2\times\frac{3000}{x}\times\frac{1}{2}=30x+\frac{3000}{x}$,

对 y 求导得，$y'=30-\frac{3000}{x^2}$,

令 $y'=0$, 解得 $x=10$,

$y''(10)>0$, 则 $x=10$ 时费用最低，

所以分 10 批费用最小.

精通教育 2020 高等数学模拟题（五）参考答案

一、 单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分)

1. 答案：C .

解析：

①要使 $g(x)$ 有意义，则 $x \neq 0$，而 $f(x)$ 的定义域为 R，所以两个函数的定义域不相同.

②要使 $g(x)$ 有意义，则 $x \geq 0$，而 $f(x)$ 的定义域为 R，所以两个函数的定义域不相同.

③二者定义域与对应法则相同，是同一函数.

④ $g(x)=\sqrt[3]{x^3}=x$，故二者的定义域与对应法则相同，是同一函数.

2. 答案：B .

解析：因为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值，且可导，所以 $f'(x_0)=0$.

根据导数的通式得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}\cdot 2=2f'(x_0)=0 .$$

3. 答案：C .

解析：由 $f(-x)=f(x)$ 知，$f(x)$ 在 $(-\infty<x<+\infty)$ 内为偶函数，$f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，说明 $f(x)$ 为单调递增，$f''(x)<0$ 说明 $f(x)$ 为凸的. 故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调递减凸函数，从而得出 C 选项：$f'(x)<0$，$f''(x)<0$.

4. 答案：A .

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-2x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{-\frac{1}{2}(-2x^2)}=1$，所以为等价无穷小.

5. 答案：C .

解析：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cos x^2}{x}=2$，所以它俩是同阶无穷小.

6. 答案：A .

解析：令 $t=\mathrm{e}^x$，则 $x=\ln t$，$f(t)=\dfrac{1}{1+\ln^2 t}$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{1+\ln^2 x}$.

所以 $f'(x)=-\dfrac{1}{(1+\ln^2 x)^2}\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=-\dfrac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)^2}$.

7. 答案：A .

解析：令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$，由逐项求导可得

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\frac{1}{1+x},\quad S(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x).$$

8. 【数一】答案：A .

解析：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$，

$$\text{则}\begin{cases}F_x' &=2x,\\ F_y' &=2y,\text{由点}(1,2,5)\Rightarrow\vec{n}=\{2,4,-1\},\\ F_z' &=-1,\end{cases}$$

法线方程为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-5}{-1}$.

【数二】答案：B .

解析：因为 $R'(Q)=10-0.02Q$，

所以 $R(Q)=\int_0^Q(10-0.02Q)\mathrm{d}Q=10Q-0.01Q^2$

9. 答案：B .

解析：极大无关组即为行阶梯中首非零元所在列对应的向量，由于极大无关组中只有两个向量，所以首非零元只有两个，即非零行只有两行，因而该矩阵的秩为2.

10. 答案：C .

解析：原式可化为 $\dfrac{\ln y}{y}\mathrm{d}y=\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow$

$$\int\frac{\ln y}{y}\mathrm{d}y=\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow\int\ln y\,\mathrm{d}\ln y=\int\ln x\,\mathrm{d}\ln x\Rightarrow\ln^2 y=\ln^2 x+C$$

由初始条件 $y\big|_{x=1}=1$ 得到 $C=0$，则特解为 $\ln^2 y=\ln^2 x$.

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．填对得 4 分，未填或错填得 0 分）

11．答案：$y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{a\pi}{2}$．

解析：因为$\frac{dx}{dt}=a\cos t-at\sin t$，$\frac{dy}{dt}=a\sin t+at\cos t$，

所以$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{a\sin t+at\cos t}{a\cos t-at\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$，

当$t=\frac{\pi}{2}$时，$x=a\times\frac{\pi}{2}\times\cos\frac{\pi}{2}=0$，$y=a\times\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{2}=\frac{a\pi}{2}$，所以切线方程

$$\left(y-\frac{a\pi}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}(x-0)\Rightarrow y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{a\pi}{2}.$$

12．答案：49．

解析：由行列式的性质可知，$|B|=7$，所以$|A||B|=7\times7=49$．

13．答案：$\frac{1}{2}$．

解析：$\lim\limits_{x\to1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln[1+(x-1)]}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{2}=\frac{1}{2}.$$

14．答案：$\sqrt{2}$．

解析：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2n+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n-1}{2^n}}\right|=\frac{1}{2}$，得收敛半径为$R=\sqrt{2}$．

15．答案：$\ln|x-2|+2\ln|x+7|+C$．

解析：由待定系数法可知，$\int\frac{3x+3}{x^2+5x-14}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+7}\right)dx=\int\frac{1}{x-2}dx$

$$+\int\frac{2}{x+7}dx=\int\frac{1}{x-2}d(x-2)+\int\frac{2}{x+7}d(x+7)=\ln|x-2|+2\ln|x+7|+C.$$

三、计算题（本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分．解答过程、步骤和答案必须完整正确）

16．解：设$F(x,y,z)=x^2+y^2+2x-2yz-e^z$

$$F_x'=2x+2,\quad F_y'=2y-2z,\quad F_z'=-2y-e^z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x+2}{2y+e^z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-2z}{2y+e^z},\quad dz=\frac{2x+2}{2y+e^z}dx+\frac{2y-2z}{2y+e^z}dy.$$

17．解：

$$\int_{1}\frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{(2x^2+x)(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}dx=\int_{-1}^{1}2dx-\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}dx+\int_{-1}^{1}x(1-\sqrt{1-x^2})dx$$

$-\pi$．

18．【数一】解：原式对应的特征方程为$r^2+6r+13=0\Rightarrow r_1=-3+2i,r_2=-3-2i$

得到对应的齐次方程通解为$y=e^{-3x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$．

【数二】解：设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$的收敛半径为$R_x$，令$y=x-1$，

$\overline{S}(y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$的收敛半径为$R_y$，则有：

$$R_y=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right|=1$$

从而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$的收敛域为$-1<y<1$，对$\overline{S}(y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$两边逐项积分得

$$\int_0^y\overline{S}(y)dy=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^y(n+1)y^n dy$$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}y^{n+1}\Big|_0^y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}y^{n+1}=\frac{y}{1-y}$ 两边对y求导得：

$$\overline{S}(y)=\left(\frac{y}{1-y}\right)'=\frac{1}{(1-y)^2}$$ 将 $y=x-1$ 带入得

$$S(x)=\frac{1}{(2-x)^2}$$

19. 解：构建增广矩阵 $B=\begin{bmatrix}3&1&0&-1&2\\1&-2&2&-1&0\\2&3&-1&2&-4\end{bmatrix}$，将其化为行最简矩阵为

$$B=\begin{bmatrix}3&1&0&-1&2\\1&-2&2&-1&0\\2&3&-1&2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1&\frac{16}{7}\\0&1&0&2&-\frac{34}{7}\\0&0&1&2&-6\end{bmatrix}$$，则其对应的同解齐次线性方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_4=0\\x_2+2x_4=0\\x_3+2x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_4\\x_2=-2x_4\\x_3=-2x_4\end{cases}$$，令 $x_4=1$，则 $\begin{cases}x_1=1\\x_2=-2\\x_3=-2\end{cases}$，解向量为 $\xi=\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\\1\end{bmatrix}$，所以对应的齐次

线性方程组的通解为 $X=k\xi=k\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\\1\end{bmatrix}\ (k\in R)$，而对应的同解非齐次线性方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_4=\frac{16}{7}\\x_2+2x_4=-\frac{34}{7}\\x_3+2x_4=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{16}{7}+x_4\\x_2=-\frac{34}{7}-2x_4\\x_3=-6-2x_4\end{cases}$$，令 $x_4=0$，则 $\begin{cases}x_1=\frac{16}{7}\\x_2=-\frac{34}{7}\\x_3=-6\end{cases}$，所以对应的同解非齐次线

性方程组的特解为 $\eta=\begin{bmatrix}\frac{16}{7}\\-\frac{34}{7}\\-6\\0\end{bmatrix}$，所以该非齐次线性方程组的通解

为 $x=X+\eta=k\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{16}{7}\\-\frac{34}{7}\\-6\\0\end{bmatrix}\ (k\in R)$.

四、应用题(本题 10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确)

20. 【数一】解：设长、宽、高各为 x、y、z，表面积为 S，则 $S=xy+2yz+2xz$，

由 $V=xyz$，解得 $z=\frac{V}{xy}$，于是 $S=xy+\frac{2V}{x}+\frac{2V}{y}\ (x>0,y>0)$，

令 $\begin{cases}S'_x=y-\frac{2V}{x^2}=0,\\S'_y=x-\frac{2V}{y^2}=0,\end{cases}$ 解得唯一驻点 $(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V})$，

由实际问题的最小值一定存在可知当 $x=y=\sqrt[3]{2V}$ 时，S 取得最小值，

这时 $z=\frac{V}{xy}=\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$，故当长和宽都为 $\sqrt[3]{2V}$，高为 $\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$ 时，用料最省.

【数二】解：（1）设平均成本为 $\overline{C}$，则 $\overline{C}=\frac{C(x)}{x}=\frac{25000}{x}+\frac{1}{40}x+200$，

$\overline{C}'=-\frac{25000}{x^2}+\frac{1}{40}$，令 $\overline{C}'=0$，得到 $x=1000$，因为 $\overline{C}''(1000)>0$，所以当 $x=1000$ 时平均成本最小，即生产 1000 件产品时平均成本最小.

（2）设利润为 L，则 $L(x)=P(x)\cdot x-C(x)=240x-\frac{3}{40}x^2-25000$.

$L'=240-\frac{3}{20}x$，令 $L'=0$，得到 $x=1600$，因为 $L''(1600)<0$，所以当 $x=1600$ 时，利润最大，$L(1600)=240\times1600-\frac{3}{40}(1600)^2-25000=167000$，即当产量为 1600 件时企业可获最大利润，最大利润为 16.7 万元.

精通教育 2020 高等数学模拟题（六）参考答案

一、 单项选择题 (本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分)

1. 答案：D.

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

2. 答案：D.

解析：因为 $y'=4x-1$，

所以根据拉格朗日定理知 $y'(\xi)=\dfrac{y(3)-y(-1)}{3-(-1)}$，

即 $4\xi-1=\dfrac{18-3+1-(2+1+1)}{4}=\dfrac{12}{4}=3$，解得 $\xi=1$.

3. 答案：B

解析：因为 $y=2+\ln x$，所以 $y'|_{x=e}=\dfrac{1}{x}\Big|_{x=e}=\dfrac{1}{e}$，即切线斜率 $k_{切}=\dfrac{1}{e}$，

所以法线斜率 $k_{法}=-e$，而当 $x=e$ 时，$y=3$，

所以法线方程为 $y-3=-e(x-e)\Rightarrow y=-ex+e^2+3$.

4. 答案：B.

解析：当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=1+x$；当 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=0$，

故 $f(x)=\begin{cases}0, x\le -1\\ 1+x, -1<x<1\\ 1, x=1\\ 0, x>1\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)=0$，所以 $x=-1$ 为连续点，

而 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2, \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$，所以 $x=1$ 为间断点.

5. 答案：A.

解析：因为 $f'(x)=\ln(x^2+x)$，

所以 $f'[g(x)]=\ln\left[(3x^2-1)^2+(3x^2-1)\right]=\ln(9x^4-3x^2)$.

6. 答案：D.

解析：因为 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot(-2t)=-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{1-t^2}\cdot(-2t)=-\dfrac{2t}{1-t^2}$，

所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\frac{2t}{1-t^2}}{-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}=\dfrac{2}{\sqrt{1-t^2}}$.

7. 答案：A.

解析：设被积函数 $f(x)=\ln x^2\sin x\cos^2 x$，而 $f(-x)=-\ln x^2\sin x\cos^2 x$，所以 $f(x)$ 为奇函数，又因为积分区间关于原点对称，所以该定积分的结果为 0.

8. 【数一】答案：A.

解析：两直线的方向向量分别为

$$\vec{s}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&-1\\-2&1&1\end{vmatrix}=\{3,1,5\}，\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&6&-3\\2&-1&-1\end{vmatrix}=\{-9,-3,-15\}，可知\ \vec{s}_2=-3\vec{s}_1，即平行.$$

【数二】答案：D.

解析：因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x=0$，$f(1)=0$，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

因为 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1-0}{x-1}=1$，

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln(1+x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$，

所以 $f'(1)=1$，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

9. 答案：D.

解析：利用按列展开定理，可知

$D=a_{11}A_{11}+a_{41}A_{41}=a_1\times(-1)^{1+1}(a_2a_3a_4-b_2b_3a_4)+b_4\times(-1)^{4+1}$
$(b_1a_2a_3-b_1b_2b_3)=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

10. 答案：D.

解析：由题意可知

$$y'=\mathrm{e}^{y}\sin x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{y}\sin x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^{y}}=\sin x\mathrm{d}x$$

等式两边同时积分可得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^{y}}=\int\sin x\mathrm{d}x\Rightarrow-\mathrm{e}^{-y}=-\cos x+C\Rightarrow\mathrm{e}^{-y}=\cos x+C$$

由初始条件 $C=\mathrm{e}$，则特解为 $y=-\ln(\cos x+\mathrm{e})$.

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．填对得 4 分，未填或错填得 0 分）

11. 答案：$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

解析：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{3}{6+x}\right)\cdot\frac{x-1}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$

12. 答案：$-\dfrac{2xz}{x^2+4y^2z}$.

解析：令 $F(x,y,z)=x^2z+2y^2z^2+y$

$$\therefore F'_x=2xz,\ F'_z=x^2+4y^2z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2xz}{x^2+4y^2z}.$$

13. 答案：$\sqrt{5}$.

解析：设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(2x-1)^n$ 的收敛半径为 R，$|2\cdot(-2)-1|\le R$，$|2\cdot3-1|\ge R$，得 $R=5$，

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 收敛半径为 $\sqrt{5}$.

14. 答案：$\begin{bmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$.

解析：等号两边同时左乘一个 $(A+B)^{-1}$，即

$$(A+B)^{-1}(A+B)X=(A+B)^{-1}E\Rightarrow EX=(A+B)^{-1}\Rightarrow X=(A+B)^{-1}$$

而 $(A+B)=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，所以

$$X=(A+B)^{-1}=\frac{1}{|A+B|}(A+B)^{*}=-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -4\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}.$$

15. 答案：$[-2,1]$.

解析：$\begin{cases}0\le x+3\le4\\ 0\le x^2\le4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\le x\le1\\ -2\le x\le2\end{cases}\Rightarrow[-2,1]$.

三、计算题(本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分．解答过程、步骤和答案必须完整正确)

16. 解：由题意可知，

$$f(x)=\ln x=\ln(3+x-3)=\ln3\left[1+\frac{1}{3}(x-3)\right]=\ln3+\ln\left(1+\frac{x-3}{3}\right)$$

$$=\ln3+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-3}{3}\right)^n$$

$$=\ln3+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{n\cdot3^n}\qquad(0<x\le6)$$

17. 解：令 $t=x$，$v=xy$，

$$\therefore\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f'_t+yf'_v$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f'_t}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial f'_t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+f'_v+y\left(\frac{\partial f'_v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial f'_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=xf''_{tv}+f'_v+xyf''_{vv}$$

18. 【数一】解：由题意可知，

$$I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y+x-y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+y)\mathrm{d}y$$

$$=\left(\oint_{L+\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}\right)(\mathrm{e}^x\sin y+x-y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+y)\mathrm{d}y$$

而 $\oint_{L+\overline{OA}}(\mathrm{e}^x\sin y+x-y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=\dfrac{\pi a^2}{2}$，

$$\int_{\overline{OA}}(\mathrm{e}^x\sin y+x-y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+y)\mathrm{d}y=\int_0^{2a}x\mathrm{d}x=2a^2,$$

所以$\int_L (e^x \sin y + x - y)dx + (e^x \cos y + y)dy = (\frac{\pi}{2} - 2)a^2$.

【数二】解：原式可化为$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{e^{-2x}}{1+x^2} \Rightarrow p(x) = \frac{2x}{1+x^2}$，$q(x) = \frac{e^{-2x}}{1+x^2}$

$$\therefore y = e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C] = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx}[\int \frac{e^{-2x}}{1+x^2} \cdot e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx}dx + C] =$$

$$\frac{1}{1+x^2}(\int e^{-2x}dx + C) = \frac{1}{1+x^2}(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C) = -\frac{e^{-2x}}{2(1+x^2)} + \frac{C}{1+x^2}.$$

19. 解：构建增广矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & k & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2k & k+1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-2 \end{bmatrix}$，

所以当$k=2$时，该线性方程组有解.

将$k=2$代入矩阵中可得，原矩阵$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，其对应的齐次线性方程组为

$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3, \\ x_2 = -2x_4 \end{cases}$（自由未知元为$x_3$，$x_4$），

所以对应的齐次线性方程组的基础解系为

令$x_3 = 1$，$x_4 = 0$，可得$\xi_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，令$x_3 = 0$，$x_4 = 1$，可得$\xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，

对应的非齐次线性方程组的特解为：令$x_3 = 0$，$x_4 = 0$，可得$\eta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，

所以该线性方程组的通解为：$x = k_1\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ （k_1，k_2为任意常数）.

四、应用题(本题 10 分．解答过程、步骤和答案必须完整、正确)

20. 【数一】解：设矩形的长为x，宽为y，

则周长为$l = 2(x+y)$，又因为$x^2 + y^2 = a^2$，所以作拉格朗日函数为：

$F(x, y, \lambda) = 2(x+y) + \lambda(x^2 + y^2 - a^2)$，

令$\begin{cases} F'_x = 2 + 2x\lambda = 0, \\ F'_y = 2 + 2y\lambda = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - a^2 = 0 \end{cases}$可得$x = \frac{\sqrt{2}a}{2}$，$y = \frac{\sqrt{2}a}{2}$，根据问题性质可知，最大周长的矩形肯定存在，所以当长和宽都为$\frac{\sqrt{2}a}{2}$时，矩形的周长最大，即为正方形，最大周长为$2\sqrt{2}a$.

【数二】解：由题意可得，

总收益为$R = pQ = 80p - \frac{1}{3}p^3$，总利润为$L = R - C = 80p - \frac{1}{3}p^3 - 240 + p^2 - 100$，

求导可得$L' = 80 - p^2 + 2p$，解得驻点$p_1 = -8$（舍去），$p_2 = 10$，

根据实际情况，L存在最大值，且符合条件的只有一个驻点，所以所得驻点即为最大值点，

所以当$p = 10$时，利润最大，最大利润为$L_{\max} = 800 - \frac{512}{3} - 240 + 64 - 100 = \frac{1060}{3}$.

故，当市场价格定为10万元时，可以获得最大利润，最大利润为$\frac{1060}{3}$万元.

精通教育 2020 高等数学模拟题（七）参考答案

一、 单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分)

1. 答案：B

解析：$\begin{cases} -1 \le 1-x \le 1 \\ \dfrac{1+x}{1-x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow [0,1)$，故选 B.

2. 答案：D

解析：若 $a=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(\frac{1}{x}) = 0 = g(0)$，从而 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续；

若 $a \ne 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(\frac{1}{x}) = a \ne g(0)$，从而 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

3. 答案：C

解析：根据导数的通式得 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3h)-f(-h)}{2h} = \dfrac{3-(-1)}{2} f'(0) = 2f'(0)$.

4. 答案：A

解析：$y' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$，$y'' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$，

$y''' = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$，…，$y^{(n)} = (x+n)e^x$，故选 A.

5. 答案：B

解析：

$\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{4+x^2} dx = \dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{4}} d\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x}{2}\Big|_0^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\arctan 0 = \dfrac{\pi}{4}$，故选 B.

6. 【数一】答案：D

解析：直线垂直于平面，则直线的方向向量与平面的法向量平行，可取直线的方向向量 $\vec{s} = \vec{n} = \{0,0,1\}$，根据点向式确定直线方程为

$\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-0}{0} = \dfrac{z+1}{1} \Rightarrow \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+1}{1}$，故选 D.

【数二】答案：B

解析：$f'(x) = \sin x$，则 $f(x) = \int f'(x)dx = \int \sin x dx = -\cos x + C$，

$\int f(x)dx = \int (-\cos x + C)dx = -\sin x + Cx + C_1$，令 $C=0, C_1=1$，故 $f(x)$ 的一个原函数为 $1-\sin x$，故选 B.

7. 【数一】答案：C

解析：$\because \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+2y}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2e^{x^2+2y}$，故选 C.

$\therefore dz = 2xe^{x^2+2y}dx + 2e^{x^2+2y}dy$

【数二】答案：A

解析：对于 A 选项，$x\sin^2 x$ 为奇函数，由积分性质知，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx = 0$；

对于 B 选项，$\int_{-1}^{1}|x|dx = 2\int_0^1 x dx = x^2\Big|_0^1 = 1$；对于 C 选项，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$；

对于 D 选项，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$，故选 A.

8. 【数一】答案：B

解析：由题可知在积分区域为 $\begin{cases} 0 \le y \le 2, \\ y^2 \le x \le 2y, \end{cases}$ 交换积分次序得为 $\begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ \dfrac{x}{2} \le y \le \sqrt{x}, \end{cases}$

从而 $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$，故选 B.

【数二】答案：B

解析：因为 $f(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$，所以 $f'(x) = e^{x^2}$，$f'(0) = 1$.

9. 答案：C

解析：选项 C 因为 $|u_n| = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛.根据莱布尼茨定理条件可知交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$ 绝对收敛.

10. 答案：B

解析：原式可化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\dfrac{\cos x\mathrm{d}x}{\sin x}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}\ln y}{\ln y}=\dfrac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x}$，

$\int\dfrac{1}{\ln y}\mathrm{d}\ln y=\int\dfrac{1}{\sin x}\mathrm{d}\sin x\Rightarrow\ln|\ln y|=\ln|\sin x|+C_1\Rightarrow\ln y=C\sin x\Rightarrow y=\mathrm{e}^{C\sin x}$，

由初始条件 $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}$ 得到 $C=1$，则特解为 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$.

二、填空题 (本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．填对得 4 分，未填或错填得 0 分)

11. 答案：$\ln 2$

解析：左边 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3a}{x-a})^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3a}{x-a}\cdot x}=\mathrm{e}^{3a}$，由 $\mathrm{e}^{3a}=8\Rightarrow a=\ln 2$.

12. 答案：$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

解析：因为 $f'(x)=3x^2-3$，

所以 $f'(\xi)=3\xi^2-3=\dfrac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\dfrac{0-(-8+6)}{2}=\dfrac{2}{2}=1$，

解得 $\xi=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $\xi=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$（舍）.

13. 答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析：

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}{(n+1)}\cdot\frac{n}{2^n+(-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}\right|=2$$

故收敛半径为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

14. 答案：2

解析：
$$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&3&0\\-3&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&3&0\\2&2&1\\-3&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&2&1\\-3&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&8&1\\0&-8&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&8&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
故 $R(A)=2$.

15. 答案：-2

解析：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 $\begin{vmatrix}a&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1-a&1+2a\\0&-3&3\\1&1&-2\end{vmatrix}=3(2+a)=0,$

解得 $a=-2$.

三、计算题(本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分．解答过程、步骤和答案必须完整正确)

16. 解：

$$V_y=\pi\int_1^2[(y+\mathrm{e}^y)^2-y^2]\mathrm{d}y=\pi\int_1^2(2y\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}y=\pi(\frac{1}{2}\mathrm{e}^4+\frac{3}{2}\mathrm{e}^2).$$

17. 解：由 $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'+yzf_3'$，$\dfrac{\partial\omega}{\partial z}=xyf_3'$，知

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial z}=2x^2yf_{13}''+xy^2f_{23}''+xy^2zf_{33}''+yf_3'$$

18. 【数一】解：

$$\iint\limits_D(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2x}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1(\frac{10}{3}x^3-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

【数二】解：

$$I=\int_0^1\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\int_0^1\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\sin x\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}\sin x=\mathrm{e}\sin 1-\int_0^1\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}\sin 1-\int_0^1\cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}\sin 1-\mathrm{e}^x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}\cos x=\mathrm{e}\sin 1-\mathrm{e}\cos 1+1-\int_0^1\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$$

从而 $I=\int_0^1 \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}\sin 1-\mathrm{e}\cos 1+1)$.

19. 解：

（1）$|A|=0,|A-B|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$

所以 A 不可逆，$A-B$ 可逆

又

$$(A-B|E)\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\\0&2&1&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\\0&0&-1&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

（2）解：将 $AX=BX+A$ 变形为 $(A-B)X=A$

由于 $A-B$ 可逆，所以存在 $X=(A-B)^{-1}A$ 满足要求且

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&2\\1&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&4&2\\1&-6&-2\end{pmatrix}$$

四、应用题(本题 10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确)

20. 【数一】解：设直角三角形的两直角边长分别为 x，y，则周长

$C=x+y+l\ (0<x<l,0<y<l)$.本题是求周长 C 在 $x^2+y^2=l^2$ 条件下的条件极值问题.

作拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2)$.

令 $\begin{cases}L_x'=1+2\lambda x=0, \\ L_y'=1+2\lambda y=0, \\ L_\lambda'=x^2+y^2-l^2=0,\end{cases}$ 解得 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}l$，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}l,\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)$ 是唯一可能的极值点，根据问题性质可知这种最大周长的直角三角形一定存在，所以在斜边长为 l 的一切直角三角形中，周长最大的是等腰直角三角形，腰长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}l$.

【数二】解：总收入 $R(x)=qP(q)=q\times\frac{6000-q}{2000}=\frac{6000q-q^2}{2000}$

总成本 $C(q)500+0.56q$

利润 $L(q)=R(q)-C(q)=\frac{6000q-q^2}{2000}-(500+0.56q)$

又 $C'(q)=0.56$，$R'(q)=\frac{6000-2q}{2000}$

则边际利润为 $L'(q)=R'(q)-C'(q)=\frac{6000-2q}{2000}-0.56$，令 $L'(q)=0$

即 $\frac{6000-2q}{2000}=0.56\Rightarrow q=2440$,

所以 $q=2440$ (盘).

由于 $q=2440$ 是函数 $L(q)$ 唯一的极值点,所以是函数的最大点，即当产量为 2440 时有最大利润.

，

最大利润

$$L_{\max}(2440)=\frac{6000\times 2440-2440^2}{2000}-(500-0.56\times 2440)=2476.8,$$

所以当产量为 2440 时，餐店获得最大利润,最大利润为 2476.8 元.

精通教育 2020 高等数学模拟题（八）参考答案

一、 **单项选择题 (本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分)**

1. 答案：B

解析：因为函数在 $x=0$ 点处连续，所以

$$f(0)=k=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$$

即 $k=1$,故选 B.

2. 答案：B

解析：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin^2\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{k+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{k+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{k+1}}{n^2}=1\Rightarrow k=1$，故选 B.

3. 答案：C

解析：令 $F(x,y)=xy+\ln y-1=0$，则 $F_x'=y$， $F_y'=x+\dfrac{1}{y}$.

根据公式法得 $x'=\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{F_y'}{F_x'}=-\dfrac{x+\frac{1}{y}}{y}=-\dfrac{xy+1}{y^2}$.

所以 $dx=-\dfrac{xy+1}{y^2}dy$.故选 C.

4. 答案：A

解析：由 $f(x)=x\sqrt{3-x}$，得 $f(0)=f(3)=0$.

又因为 $f'(x)=\sqrt{3-x}+x\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}}=\dfrac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}}=\dfrac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$，

所以令 $f'(\xi)=0$，得 $\xi=2$.

5. 答案：B

解析： $f(x)=k\tan 2x=(\dfrac{1}{2}\ln\cos 2x)'=-\tan 2x$，即 $k=-1$.

6. 【数一】答案：D

解析：两直线的方向向量分别为 $\{3,2,-4\}$ 和 $\{6,4,-8\}$，方向数对应成比例，即平行，且都通过点 $(2,1,3)$，所以重合，故选 D.

【数二】答案：D

解析：$[\dfrac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})]'=e^{2x}+e^{-2x}\neq e^{2x}-e^{-2x}$.故选 D.

6. 答案：A

解析：

$f_x'=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$f_y'=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

$\therefore f_x'=0\Rightarrow y=0$

$f_y'=0\Rightarrow x=0$

$\therefore$ 可能极值点为 $(0,0)$

由 $A=f_{xx}''$，$B=f_{xy}''$，$C=f_{yy}''$ 可知，

当 $x=0,y=0$ 时， $B^2-AC<0$，$A<0$，

所以 $(0,0)$ 是极大值点.

7. 答案：A

解析：幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^n$ 的收敛半径为 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$$=2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+e^x=2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+e^x=(2x+1)e^x$$

8. 答案：D

解析：

由已知条件得 $p(x)=-1,q(x)=\mathrm{e}^x$

$$\therefore y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=\mathrm{e}^{-\int -1\mathrm{d}x}(\int \mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^x(x+C)$$

由初始条件 $C=0$，则特解为 $y=x\mathrm{e}^x$.

9. 答案：D

解析：$A+2B=(3\alpha_1,-\alpha_2,5\alpha_3,\beta_1+2\beta_2)$，则

$$\begin{aligned}|A+2B|&=-15|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+2\beta_2|=-15(|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|+|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,2\beta_2|)\\&=-15(|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|-|\alpha_1,-\alpha_2,2\alpha_3,\beta_2|)\\&=-15(|A|-|B|)\\&=-75\end{aligned}$$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．填对得 4 分，未填或错填得 0 分）

11. 答案：$\sqrt{2}(x+\sqrt{x^2})^{\frac{1}{4}}$

解析：$f[f(x)]=\sqrt{f(x)+\sqrt{f^2(x)}}=\sqrt{\sqrt{x+\sqrt{x^2}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2}}}=\sqrt{2}(x+\sqrt{x^2})^{\frac{1}{4}}$

12. 答案：$\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\mathrm{d}x$

解析：$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=-\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\mathrm{d}x$.

13. 答案：$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n-\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right](x-2)^n$，$1<x<3$.

解析：$f(x)=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$，

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1+(x-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n,\quad 1<x<3,$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3+(x-2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-2)^n,\quad -1<x<5,$$

故 $f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n-\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right](x-2)^n$，$1<x<3$.

14. 答案：$\tan x\cdot\tan y=C$

解析：原式可化为 $\sec^2 y\cdot\frac{1}{\tan y}\mathrm{d}y=-\sec^2 x\cdot\frac{1}{\tan x}\mathrm{d}x\Rightarrow$

$$\int\sec^2 y\cdot\frac{1}{\tan y}\mathrm{d}y=-\int\sec^2 x\cdot\frac{1}{\tan x}\mathrm{d}x\Rightarrow\int\frac{1}{\tan y}\mathrm{d}\tan y=-\int\frac{1}{\tan x}\mathrm{d}\tan x\Rightarrow$$

$\ln|\tan y|=-\ln|\tan x|+C\Rightarrow\tan x\cdot\tan y=C.$

15. 答案：75

解析：按第 1 列展开

$$D=1\cdot\begin{vmatrix}2&3&0\\3&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}0&0&4\\2&3&0\\3&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3\\3&2\end{vmatrix}-16\begin{vmatrix}2&3\\3&2\end{vmatrix}=75.$$

三、计算题（本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分．解答过程、步骤和答案必须完整正确）

16. 解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left(\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1-t^2}\right)\mathrm{d}t}{x^2\left(\mathrm{e}^x-1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left(\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1-t^2}\right)\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x^2-\left(1-x^2\right)}{3x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{3\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{1}{3}.$$

17. 解：

$\because \dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_x'},\dfrac{\partial y}{\partial z}=-\dfrac{F_z'}{F_y'},\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}$

$\therefore \dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(-\dfrac{F_y'}{F_x'}\right)\cdot\left(-\dfrac{F_z'}{F_y'}\right)\cdot\left(-\dfrac{F_x'}{F_z'}\right)=-1.$

18. 【数一】

解：对应齐次方程 $y''+5y'+4y=0$ 的特征方程为 $r^2+5r+4=0\Rightarrow r_1=-1,r_2=-4$

得到对应的齐次方程通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-4x}$，

$f(x)=3-2x$，因为 $\lambda=0$ 不是方程的特征根，

所以可设特解为 $y^*=ax+b$，

代入原方程得到 $4ax+5a+4b=-2x+3\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2},b=\dfrac{11}{8}$，

所以原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-4x}-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{8}$.

【数二】解：$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x$，

其中，$\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}(1-\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x})\mathrm{d}x=1-\ln(1+\mathrm{e}^x)\Big|_{-1}^{0}=\ln(1+\mathrm{e})-\ln 2,$

$\int_{0}^{1}\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}(x+1)=\ln(1+x)\Big|_{0}^{1}=\ln 2,$

所以 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\ln(1+\mathrm{e})$.

19. 解：

$$A=\begin{pmatrix}2&-4&5&3\\3&-6&4&2\\4&-8&17&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0&-\frac{2}{7}\\0&0&1&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2-\dfrac{2}{7}x_4=0\\x_3+\dfrac{5}{7}x_4=0\end{cases}$，

令自由未知数 $\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\0\\-\frac{5}{7}\\1\end{pmatrix}$

得通解 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\0\\-\frac{5}{7}\\1\end{pmatrix}$.

四、应用题(本题 10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确)

20. 【数一】解：设行驶了 s 千米.

总费用 $f(x)=\dfrac{s}{x}\cdot(y+100)=(\dfrac{x^2}{2500}+\dfrac{100}{x})s$，则 $f'(x)=s\cdot\left(\dfrac{x}{1250}-\dfrac{100}{x^2}\right)$.

令 $f'(x)=0$，则 $x=50$.

由于 $f''(x)=s\cdot\left(\dfrac{1}{1250}+\dfrac{200}{x^3}\right)$，且 $f''(50)>0$，故 $x=50$ 为极小值点.

根据实际问题知，$x=50$ 也是最小值点，即 $x=50$ 时，$f(x)$ 最小.

【数二】解：成本函数 $C(Q)=60000+20Q$，收益函数 $R(Q)=PQ=60Q-\dfrac{Q}{1000}$，利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=-\dfrac{Q^2}{1000}+40Q-60000$，故该商品的边际利润 $L'(Q)=-\dfrac{Q}{500}+40$，当 $P=50$，销量 $Q=10000$，$L'(10000)=20$，其经济意义：销量10000后再多售一件商品所增加的收入为20元.

精通教育 2020 高等数学模拟题（九）参考答案

一、 单项选择题 (本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分)

1. 答案：C.

解析：$\begin{cases}1-x\neq 0\\ x+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x>-1\end{cases}\Rightarrow(-1,1)\cup(1,+\infty)$，故选 C.

2. 答案：C.

解析：$f(1)=0$，$\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0$，$\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\overset{t=\frac{1}{x-1}}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}=+\infty$，

所以 $f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\neq\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$，故选 C.

3. 答案：C.

解析：原式 $=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot(2x+100)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}(4+\frac{200}{x})}=\mathrm{e}^4$，故选 C.

4. 答案：D.

解析：因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{6x}{f(1+2x)-f(1-x)}=-1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1+2x)-f(1-x)}{6x}=-1$，

根据导数的通式知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1+2x)-f(1-x)}{6x}=\frac{2-(-1)}{6}f'(1)=\frac{1}{2}f'(1)=-1$，

所以 $f'(1)=-2$，即切线斜率为 -2 .故选 D.

5. 【数一】答案：A.

解析：对应的特征方程为 $2r^2+r-1=0\Rightarrow r_1=\frac{1}{2},r_2=-1,$

得到的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.故选 A.

【数二】答案：C.

解析:由已知可得 $p(x)=\tan x\quad q(x)=\sin 2x,$

$\therefore y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}(\int\sin 2x\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)$

$=\cos x(\int\frac{\sin 2x}{\cos x}\mathrm{d}x+C)=\cos x\left(\int 2\sin x\mathrm{d}x+C\right)=C\cos x-2\cos^2 x,$

故选 C.

6. 答案：D.

解析：因为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t=\frac{2t}{1+t^2}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+t^2}$，

所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2t}$，故选 D.

7. 答案：B.

解析：因为 $0\le\frac{\sqrt{a_n}}{n}\le\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{n^2}\right)$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛，于是

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 绝对收敛，故选 B.

8. 【数一】答案：C.

解析：平面与直线垂直，则平面的法向量与直线的方向向量平行，取 $\vec{n}=\vec{s}=\{-2,3,5\}$，根据点法式确定平面方程为

$-2(x+3)+3(y-5)+5(z-2)=0\Rightarrow 2x-3y-5z+31=0$，故选 C.

【数二】答案：C.

解析：$y'=-2\mathrm{e}^{-2x}<0$，$y''=4\mathrm{e}^{-2x}>0$，

$\therefore y$ 在定义域内单调递减且为凹的.

9. 答案：B.

解析：由题已知 $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{x}+C$，即 $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，故

$\int x^3f'(x)\mathrm{d}x=x^3f(x)-\int 3x^2f(x)\mathrm{d}x=x(x\cos x-\sin x)-3\int x^2\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

$=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C.$

10. 答案：D.

解析：$(AB)^T=B^TA^T$，$AB\neq BA$，$|AB|=|BA|$，故选 D.

二、填空题 (本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分. 填对得 4 分，未填或错填得 0 分)

11. 答案：6 .

解析：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1+2x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=a$ ，所以 $a=6$.

12. 答案：-1.

解析：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1-xy}{x}\cdot\dfrac{(1-xy)+xy}{(1-xy)^2}=\dfrac{1}{x-x^2y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{x-x^2y}=\dfrac{-(1-2xy)}{(x-x^2y)^2}$，

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}=\left.\frac{-(1-2xy)}{(x-x^2y)^2}\right|_{(1,0)}=-1.$$

13. 答案：$\sqrt{3}$.

解析：

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}}{\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\left|\frac{2^n+(-3)^n}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}\right|=\frac{1}{3}，得 R=\sqrt{3}.$$

14. 答案：-50 .

解析：$|AB|=|A||B|=-50$

15. 答案：0 .

解析：因为积分区间是关于原点对称，被积函数 $x\sqrt{1-\cos x}$ 为奇函数，根据定积分对称区间奇偶性质得出答案 0 .

三、计算题(本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分. 解答过程、步骤和答案必须完整正确)

16. 解：令 $u=2x+e^y$，$v=\dfrac{y^2}{x}$，

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=2xf+x^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=2xf+2x^2f_u'-y^2f_v',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=x^2e^yf_u'+2xyf_v'.$$

$$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2f+2x^3f_u'-xy^2f_v'+x^2ye^yf_u'+2xy^2f_v'$$

$$=2x^2f+x^2(2x+ye^y)f_u'+xy^2f_v'$$

17. 解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}(e^t-1+t)dt}{x\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}(e^t-1+t)dt}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{x^2}-1+x^2)2x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1+x^2}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2xe^{x^2}+2x}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}+1}{2}=1$$

18. 【数一】解：令 $x=r\cos\theta\quad y=r\sin\theta$ 则

$$I_1=\iint_D\frac{1}{1+x^2+y^2}d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{1}{1+r^2}rdr=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln2.$$

$$I_2=\iint_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+r^2}r^3dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^1\frac{1}{1+r^2}r^3dr=0.$$ 所以

$$I=I_1+I_2=\frac{\pi}{2}\ln2.$$

【数二】解：

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos2xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x(1-2\sin^2x)dx$$

$$=\left[\sin x-\frac{2}{3}\sin^3x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

19. 解：

$$[A|b]=\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\3&-2&1&-3&4\\1&4&-3&5&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&-3&5&-2\\3&-2&1&-3&4\\2&1&-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&-3&5&-2\\0&-14&10&-18&10\\0&-7&5&-9&5\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&4&-3&5&-2\\0&1&-\frac{5}{7}&\frac{9}{7}&-\frac{5}{7}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{6}{7}\\0&1&-\frac{5}{7}&\frac{9}{7}&-\frac{5}{7}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

原方程对应的齐次方程的通解方程为$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{7}x_3 + \dfrac{1}{7}x_4 \\ x_2 = \dfrac{5}{7}x_3 - \dfrac{9}{7}x_4 \end{cases}$，取$x_3, x_4$为自由未知元，得基础解系$\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.令$x_3 = x_4 = 0$，得原方程的一个特解为$\begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，所以原方程的通解为

$k_1\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，（$k_1, k_2$为任意常数）.

四、应用题(本题 10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确)

20. 【数一】解：设容器底面相邻两边长分别为$3x$ m，$4x$ m，则高为

$\dfrac{6-12x-16x}{4} = \left(\dfrac{3}{2} - 7x\right)$ (m)，容积$V = 3x \cdot 4x\left(\dfrac{3}{2} - 7x\right) = 18x^2 - 84x^3$,

令$V' = 36x - 252x^2 = 0$，解出$x = \dfrac{1}{7}$或$x = 0$（舍去），因实际问题，驻点唯一，所得极值点即为最值点，故$x = \dfrac{1}{7}$时，V取得最大值，此时高为$\dfrac{1}{2}$ m.

【数二】解：（1）由题意知商家获得的利润为

$L(Q) = R(Q) - C(Q) = -4Q^2 + 28Q - 2$

$L'(Q) = -8Q + 28$.令$L'(Q) = 0$，解得唯一驻点$Q = 3.5$.

又因为$L''(Q) = -8 < 0$，所以$Q = 3.5$为极大值点，即最大值点.

所以商家获得最大利润为47 元.

精通教育 2020 高等数学模拟题（十）参考答案

一、 单项选择题 (本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分．选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分)

1. 答案：D.

解析：$\begin{cases}-x^2-3x+4\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}\Rightarrow[-4,0)\cup(0,1]$，故选 D.

2. 答案：C.

解析：当 $b=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}(x\sin\frac{1}{x}+b)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\sin\frac{1}{x}+1)=1$，而 $f(0)=a$，所以 a 不一定为 1，则由连续定义知，$f(x)$ 未必连续，故选 C.

3. 答案：B.

解析：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，所以只有 B 的极限等于 e,故选 B.

4. 答案：D .

解析：根据导数通式得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-2x)}{x}=\frac{0-(-2)}{1}f'(1)=2f'(1)=-2$，

所以 $f'(1)=-1$，所以由导数的几何意义知切线斜率为 -1，故选 D.

5. 【数一】答案：D .

解析：原式对应的特征方程为 $r^2+2r-3=0\Rightarrow r_1=-3,r_2=1$

得到的齐次方程通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-3x}+C_2\mathrm{e}^{x}$，故选 D.

【数二】答案：A.

解析：原式可化为 $\frac{1}{y}\mathrm{d}y=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow$

$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow\ln|y|=-\ln|x|+C\Rightarrow y=\frac{C}{x}$，带入条件 $y(1)=1$ 得 $C=1$，故有 $y=\frac{1}{x}$ 故选 A.

6. 答案：B.

解析：（1）两边同时求导得 $y^2+x\cdot 2yy'-\cos y\cdot y'=0$；

（2）解方程得 $y'=-\frac{y^2}{2xy-\cos y}=\frac{y^2}{\cos y-2xy}$，故选 B.

7. 答案：B .

解析：因为 $n\to\infty$ 时，$1-\cos\frac{a}{n}\sim\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$ 绝对收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$ 收敛，即原级数绝对收敛，故选 B.

8. 【数一】答案：B .

解析：由题意知，直线方向向量

$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&3&2\\2&-1&-10\end{vmatrix}=\{-28,14,-7\}=-7\{4,-2,1\}$，显然与已知平面法向量 $\vec{n}=\{4,-2,1\}$ 平行，故直线与平面垂直，故选 B.

【数二】答案：B .

解析：$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0,\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x)=2$，所以 $x=1$ 是函数的跳跃间断点.

9. 答案：C .

解析：原式两边同时乘以 x，则 $xf(x)=x^2+x\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，令 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=A$，等式两边同时求从 0 到 1 求定积分：

$A=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 Ax\mathrm{d}x\Leftrightarrow A=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}A\Leftrightarrow A=\frac{2}{3}$

$\therefore f(x)=x+\frac{2}{3}$.

10. 答案：D .

解析：$|A^*|=\left||A|A^{-1}\right|=|A|^5|A|^{-1}=|A|^4$.

二、填空题 (本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．填对得 4 分，未填或错填得 0 分)

11. 答案：1,−4 .

解析：由 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x(\cos x-b)=0$，

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-b)}{\mathrm{e}^x-a}=5$，可推出 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x-a=0\Rightarrow a=1$，

而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=1-b=5\Rightarrow b=-4$.

12. 答案：$3^{27}\cdot 27!$.

解析：$y'=27(3x+1)^{26}\cdot3=3\cdot27(3x+1)^{26}$，

$y''=3\cdot27\cdot26(3x+1)^{25}\cdot3=3^2\cdot27\cdot26(3x+1)^{25}$，

$y'''=3^2\cdot27\cdot26\cdot25(3x+1)^{24}\cdot3=3^3\cdot27\cdot26\cdot25(3x+1)^{24}$，

…

$y^{(27)}=3^{27}\cdot27\cdot26\cdot25\cdot\cdots\cdot1(3x+1)^0=3^{27}\cdot27!$.

13. 答案：$\dfrac{1}{e}$.

解析：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot\frac{e^{n+1}-(-1)^{n+1}}{e^n-(-1)^n}\right|=e\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot\frac{e^n-\frac{(-1)^{n+1}}{e}}{e^n-(-1)^n}\right|$$

$$=e\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot\frac{1-\frac{(-1)^{n+1}}{e^{n+1}}}{1-\frac{(-1)^n}{e^n}}\right|=e\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{e}\right)^n}\right|=e$$

所以收敛半径为$\dfrac{1}{e}$.

14. 答案：$\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}$.

解析：$X=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}$.

15. 答案：$\dfrac{\pi}{3}$.

解析：$\int_{-\frac12}^{\frac12}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_0^{\frac12}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\arcsin x\Big|_0^{\frac12}=\dfrac{\pi}{3}$.

三、计算题(本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分．解答过程、步骤和答案必须完整正确)

16. 解：设$u=e^x\sin y$，$v=\ln(x+y)$，则$z=f(u,v)$，

$\therefore\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin yf'_u+\dfrac{1}{x+y}f'_v$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos yf'_u+\dfrac{1}{x+y}f'_v$.

所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^x(\sin y-\cos y)f'_u$.

17. 解：

原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x e^{2t}f(t)dt}{e^{2x}x^2}\cdot\dfrac{x^2}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x e^{2t}f(t)dt}{e^{2x}x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}f(x)}{e^{2x}(2x^2+2x)}$

$=\dfrac12\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}\cdot\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac12$

18. 【数一】解：令$P(x,y)=ax\cos y-y^2\sin x$，$Q(x,y)=by\cos x-x^2\sin y$，

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-ax\sin y-2y\sin x$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-by\sin x-2x\sin y$.

由题意得$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，解得$a=b=2$，

所以

$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}Pdx+Qdy$

$=\int_{(0,0)}^{(0,1)}Pdx+Qdy+\int_{(0,1)}^{(1,1)}Pdx+Qdy=\int_0^1Q(0,y)dy+\int_0^1P(x,1)dx$

$=\int_0^1 2ydy+\int_0^1(2x\cos1-\sin x)dx=2\cos1.$

【数二】解：令$x=\sin t$，则$dx=\cos tdt$，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\frac{1+\sin t}{\cos t}\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\mathrm{d}2t$$

$$=-\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=1+\frac{\pi}{4}$$

18. 解：

$$[A|b]=\begin{bmatrix}1&1&-3&-1&1\\3&-1&-3&4&4\\1&5&-9&-8&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&-4&6&7&1\\0&4&-6&-7&-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{4}&\frac{5}{4}\\0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

原方程对应的齐次同解方程组为$\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{4}x_4\\x_2=\frac{3}{2}x_3+\frac{7}{4}x_4\end{cases}$，

取x_3,x_4为自由未知元，令x_3,x_4分别为$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得基础解系$\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{7}{4}\\0\\1\end{pmatrix}$.

与原方程组同解方程组为$\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{4}x_4+\frac{5}{4}\\x_2=\frac{3}{2}x_3+\frac{7}{4}x_4-\frac{1}{4}\end{cases}$，令$x_3=x_4=0$，得原方程组的一个特解为$\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\-\frac{1}{4}\\0\\0\end{pmatrix}$.所以原方程组的通解为$k_1\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{7}{4}\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\-\frac{1}{4}\\0\\0\end{pmatrix}$.（$k_1,k_2$为任意常数）.

四、应用题(本题 10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确)

20. 【数一】解：设高为h，则底面半径$r=\sqrt{20^2-h^2}$，$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}\left(400-h^2\right)h$，

$V'=\frac{400\pi}{3}-\pi h^2$，令$V'=0$得$h=\frac{20\sqrt{3}}{3}$，$V''\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)<0$，故$h=\frac{20\sqrt{3}}{3}$为极大值点，在此问题中也为最大值点，即高为$\frac{20\sqrt{3}}{3}\text{cm}$时，其体积最大.

【数二】解：设销售利润为L，

$$L=5(P-2)(7-P)-3\times5(7-P)-1$$

$$=-5P^2+(50+5\times2)P-3\times2-105$$
$$=-5P^2+60P-176$$

对L求导得$L'=-10P+60$.

令$L'=0$，解得唯一驻点$P=6$.

因为驻点唯一，所以$P=6$为最大值点，此时$x=5$.

即商家获得最大利润的销售量为5吨.