2020高等代数(一)答案

一. 1. $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$ 　2. 1, 0

二. 3. B 　4. D

三. 5. X 　6. X

四. 7. (1) 二次型的矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}$

设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 可知

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=a$

$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4a-2b^2$

$\therefore a=1, b=\pm 2.$ (舍去-2)

(2) A的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

得A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=-3$

① 将$\lambda_1=\lambda_2=2$代入对齐次方程,

$\begin{cases} x_1-2x_3=0 \\ -2x_1+4x_3=0 \end{cases}$ 得基础解系 $\alpha_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 即为特征值2的特征向量

② 将$\lambda_3=-3$代入对应齐次方程

$\begin{cases} -4x_1-2x_3=0 \\ -5x_2=0 \\ -2x_1-x_3=0 \end{cases}$ 得基础解系 $\alpha_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, 即为特征值-3的特征向量.

显然 α_1,α_2正交, 且与α_3属不同的特征值, $\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$两两正交.

$\therefore$ 我们只需将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$单位化即可, 不需再正交化.

$\eta_1=\frac{1}{|\alpha_1|}\alpha_1=\left(\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right)^T$

$\eta_2=\frac{1}{|\alpha_2|}\alpha_2=(0,1,0)^T$

$\eta_3=\frac{1}{|\alpha_3|}\alpha_3=\left(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right)^T$

令 $Q=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{1}{\sqrt5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt5} & 0 & -\frac{2}{\sqrt5} \end{bmatrix}$ 使 $Q^TAQ=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

则二次型标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$

8. 设向量ξ在两个基下有相同的坐标，记为(k_1,k_2,k_3,k_4)

即$\xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}$

即 $\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{\text{记为}A}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}}_{\text{记为}B}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}$

即 $(B-A)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}=0$ 即 $\begin{cases}k_1+5k_3+6k_4=0\\k_1+2k_2+3k_3+6k_4=0\\-k_1+k_2+k_3+k_4=0\\k_1+k_3+2k_4=0\end{cases}$ 解得$(k_1,k_2,k_3,k_4)=C\cdot(1,1,1,-1)$

其中C为任一非零实数.

五. 9(1) 显然W是$P^{n\times n}$的一个非空子集合

下面我们证明W是线性空间

对于$\forall A,B\in W$，有$A^T=A, B^T=B$

$(A+B)^T=A^T+B^T$

$=A+B$ $\therefore A+B\in W$，对加法封闭

对于$k\in P$

$(kA)^T=kA^T$

$=kA$ $\therefore kA\in W$，对数乘封闭.

$\therefore W$是$P^{n\times n}$的一个线性子空间

(2) 维数为 $\dfrac{n(n+1)}{2}$

基为$\{E_{ij}\mid E_{ij}$为第i行第j列与第j行第i行为1，其余元素为0的对称矩阵，其中$0\le i\le j\le n\}$.

10. 设A的特征值为λ，其对应特征向量为X，有

$AX=\lambda X$ (特征值/向量的定义)

$\therefore A^2X=A(\lambda X)$

$=\lambda(AX)$

$=\lambda^2X$

$\because A^2=A$ $\therefore AX=\lambda^2X$

$\lambda X=\lambda^2 X$

$\therefore$ ~~[illegible]~~ $\lambda=0$或$\lambda=1$

2020高等代数(二)答案

一. 1. $-3M$

2. 100

二. 3. C　4. C

三. 5. √　6. ×

四. 7. 辗转相除法

$q_2(x)=x+1$	$g(x)$	$f(x)$	
	x^2-x-1	$x^4-x^3-4x^2+4x+1$	$x^2-3=q_1(x)$
	x^2-2x	$x^4-x^3-x^2$	
	$x-1$	$-3x^2+4x+1$	
	$x-2$	$-3x^2+3x+3$	
	$r_2(x)=1$	$r_1(x)=x-2$	

我们把上述计算列出

① $f(x)=g(x)\cdot q_1(x)+r_1(x)$

② $g(x)=r_1(x)\cdot q_2(x)+r_2(x)$　∵ $r_2(x)$为非0常数 ∴ $f(x)$与$g(x)$互素

即最大公因式 $d(x)=r_2(x)=1$

由②得，$d(x)=r_2(x)=g(x)-r_1(x)\cdot q_2(x)$

$=g(x)-q_2(x)\cdot[f(x)-g(x)\cdot q_1(x)]$

$=-q_2(x)\cdot f(x)+[1+q_1(x)q_2(x)]g(x)$

∴ $u(x)=-q_2(x)=-x-1$　　$v(x)=1+q_1(x)q_2(x)=x^3+x^2-3x-2.$

8. (1) 二次型f对应的矩阵记为A

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&6&1\\2&1&t\end{bmatrix}$$

A的顺序主子式 $P_1=1>0$

$$P_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&6\end{vmatrix}=2>0$$

$$P_3=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&6&1\\2&1&t\end{vmatrix}=2t-17$$

∴ $P_3>0$，即 $t>\frac{17}{2}$ 时，顺序主子式全部大于0，f是正定的

(2) $t=2$ 时

$$\begin{pmatrix} A \\ \vdots \\ E \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -\frac{13}{2} \\ 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} \\ 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \\ 1 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 为非退化的线性替换

即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 10y_3 \\ x_2 = y_2 + 3y_3 \\ x_3 = 2y_3 \end{cases}$

标准形 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 - 26y_3^2$ 正惯性指数为2，负惯性指数为1.

五.9. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ ① 与向量组 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s$ ② 的极大无关组分别为

$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$ ③ 与 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r$ ④.（秩相同）

$\because$ ①可由②线性表出

$\therefore$ ①可由④线性表出

$\therefore$ ③可由④线性表出，即 $\begin{cases} \alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1r}\beta_r \\ \alpha_2 = a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2r}\beta_r \\ \vdots \\ \alpha_r = a_{r1}\beta_1 + a_{r2}\beta_2 + \cdots + a_{rr}\beta_r \end{cases}$

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}$，上式可记为 $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix}$

$\because \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r$ 线性无关 且 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$ 也线性无关

$\therefore$ A必为非退化矩阵，$\therefore$ ④可由③线性表出

$\therefore$ ③等价④

$\therefore$ ①与②等价，结论得证

注：（线性无关向量组 $\xrightarrow[\text{线性替换}]{\text{非退化的}}$ 线性无关向量组）

10. 反证法：设p_1+p_2是A的特征向量，且属于特征值λ.

即 $A(p_1+p_2)=\lambda(p_1+p_2)$

$=\lambda p_1+\lambda p_2$ ①

由已知可得 $A(p_1+p_2)=Ap_1+Ap_2$

$=\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2$ ②

用①-②，得 $(\lambda-\lambda_1)p_1+(\lambda-\lambda_2)p_2=0$

∵ λ_1，λ_2是不同的特征值

∴ $\cancel{\lambda_1-\lambda_2=}$ $\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2$，与题设矛盾

∴ $\alpha_1+\alpha_2$不是A的特征向量，结论得证.