2020年数学与应用数学专业专接本模拟卷（一）

一、填空题

1.1　2.$-\frac{2}{3}f^{'}(3)$　3.$f_1^{'}+xf_2^{'}$　4.$\frac{\pi^2}{2}-4$　5.$\left[\frac{1}{e},e\right]$

二、单项选择题

9.A　10.D　11.C　12.B　13.A

三、判断题

17.×　18.×　19.√　20.×　21.×

四、计算题

25.解：该幂级数的收敛域为$[-1,1]$.

令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$，则

$$S^{'}(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n\right)^{'}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}x^n\right]^{'}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n-1}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}.$$

令$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，则

$$S_1^{'}(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)^{'}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)^{'}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1-x^n)}{1-x}=\frac{x}{1-x},$$

所以$S_1(x)=\int_0^x S_1^{'}(x)dx=\int_0^x\frac{x}{1-x}dx=\int_0^x\frac{x-1+1}{1-x}dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}-1dx=-\ln(1-x)-x$，

所以$S^{'}(x)=\frac{1}{x^2}[-\ln(1-x)-x]$，

所 以 $S(x)=\int_0^x\frac{1}{x^2}[-\ln(1-x)-x]dx=\int_0^x\left[-\frac{\ln(1-x)}{x^2}-\frac{1}{x}\right]dx=\frac{1-x}{x}\ln(1-x)\Big|_0^x=\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}+1$ ，$-1\le x<1$且$x\neq 0$.

当$x=0$时，$S(x)=0$.

当$x=1$时，$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

26.解：$\iint_D x^2+y^2d\sigma=\iint_D x^2+y^2dxdy$

$$=\int_0^1dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(x^2+y^2)dy=\int_0^1\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dx$$

$$=\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{7}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{14}{15}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^1=\frac{128}{105}.$$

五、证明题

30.证明：由题意知，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'}{(-1)F_1'+(-1)F_2'}=\frac{F_1'}{F_1'+F_2'}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2'}{(-1)F_1'+(-1)F_2'}=\frac{F_2'}{F_1'+F_2'}.$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$，即 $z_x'+z_y'=1$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_1'}{F_1'+F_2'}\right)$$

$$=\frac{\left[F_{11}''(1-z_x')+F_{12}''(-z_x')\right](F_1'+F_2')-F_1'\left[F_{11}''(1-z_x')+F_{12}''(-z_x')+F_{21}''(1-z_x')+F_{22}''(-z_x')\right]}{(F_1'+F_2')^2}$$

$$=\frac{F_1'F_{11}''(1-z_x')-F_1'F_{12}''z_x'+F_2'F_{11}''(1-z_x')-F_2'F_{12}''z_x'-F_1'F_{11}''(1-z_x')+F_1'F_{12}''z_x'-F_1'F_{21}''(1-z_x')+F_1'F_{22}''z_x'}{(F_1'+F_2')^2}$$

$$=\frac{-F_1'F_{12}''z_x'+F_2'F_{11}''-F_2'F_{11}''z_x'-F_2'F_{12}''z_x'+F_1'F_{12}''z_x'-F_1'F_{21}''+F_1'F_{21}''z_x'+F_1'F_{22}''z_x'}{(F_1'+F_2')^2}$$

$$=\frac{F_2'F_{11}''-F_2'F_{11}''z_x'-F_2'F_{12}''z_x'+F_1'F_{12}''z_x'-F_1'F_{21}''+F_1'F_{22}''z_x'}{(F_1'+F_2')^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_1'}{F_1'+F_2'}\right)$$

$$=\frac{\left[F_{11}''(-z_y')+F_{12}''(1-z_y')\right](F_1'+F_2')-F_1'\left[F_{11}''(-z_y')+F_{12}''(1-z_y')+F_{21}''(-z_y')+F_{22}''(1-z_y')\right]}{(F_1'+F_2')^2}$$

$$=\frac{-F_1'F_{11}''z_y'-F_2'F_{11}''z_y'+F_1'F_{12}''(1-z_y')+F_2'F_{12}''(1-z_y')+F_1'F_{11}''z_y'-F_1'F_{12}''(1-z_y')+F_1'F_{21}''z_y'-F_1'F_{22}''(1-z_y')}{(F_1'+F_2')^2}$$

$$=\frac{-F_2'F_{11}''z_y'+F_2'F_{12}''-F_2'F_{12}''z_y'+F_1'F_{21}''z_y'-F_1'F_{22}''+F_1'F_{22}''z_y'}{(F_1'+F_2')^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_2'}{F_1'+F_2'}\right)$$

$$=\frac{\left[F_{21}''\left(-z_y'\right)+F_{22}''\left(1-z_y'\right)\right]\left(F_1'+F_2'\right)-F_2'\left[F_{11}''\left(-z_y'\right)+F_{12}''\left(1-z_y'\right)+F_{21}''\left(-z_y'\right)+F_{22}''\left(1-z_y'\right)\right]}{\left(F_1'+F_2'\right)^2}$$

$$=\frac{-F_1'F_{21}''z_y'+F_1'F_{22}''\left(1-z_y'\right)-F_2'F_{21}''z_y'+F_2'F_{22}''\left(1-z_y'\right)+F_2'F_{11}''z_y'-F_2'F_{12}''\left(1-z_y'\right)+F_2'F_{21}''z_y'-F_2'F_{22}''\left(1-z_y'\right)}{\left(F_1'+F_2'\right)^2}$$

$$=\frac{-F_1'F_{21}''z_y'+F_1'F_{22}''-F_1'F_{22}''z_y'+F_2'F_{11}''z_y'-F_2'F_{12}''+F_2'F_{12}''z_y'}{\left(F_1'+F_2'\right)^2},$$

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{F_2'F_{11}''-F_2'F_{11}''z_x'-F_2'F_{12}''z_x'+F_1'F_{12}''z_x'-F_1'F_{21}''+F_1'F_{22}''z_x'}{\left(F_1'+F_2'\right)^2}+$

$$2\cdot\frac{-F_2'F_{11}''z_y'+F_2'F_{12}''-F_2'F_{12}''z_y'+F_1'F_{21}''z_y'-F_1'F_{22}''+F_1'F_{22}''z_y'}{\left(F_1'+F_2'\right)^2}+$$

$$\frac{-F_1'F_{21}''z_y'+F_1'F_{22}''-F_1'F_{22}''z_y'+F_2'F_{11}''z_y'-F_2'F_{12}''+F_2'F_{12}''z_y'}{\left(F_1'+F_2'\right)^2}$$

$$=\frac{-F_2'F_{11}''z_y'+F_2'F_{12}''-F_2'F_{12}''z_y'+F_1'F_{21}''z_y'-F_1'F_{22}''+F_1'F_{22}''z_y'+F_2'F_{11}''-F_2'F_{11}''z_x'-F_2'F_{12}''z_x'+F_1'F_{12}''z_x'-F_1'F_{21}''+F_1'F_{22}''z_x'}{\left(F_1'+F_2'\right)^2}$$

$$=\frac{-F_2'F_{11}''+F_2'F_{12}''-F_2'F_{12}''+F_1'F_{12}''-F_1'F_{22}''+F_1'F_{22}''+F_2'F_{11}''-F_1'F_{21}''}{\left(F_1'+F_2'\right)^2}=0.$$

六、应用题

33.解：设矩形的一边长为 x，则另一边长为 $p-x$，假设矩形绕长为 $p-x$ 的一边所在直线旋转，则旋转所成圆柱体的体积为 $V=\pi x^2\left(p-x\right)$.

令 $V'=2\pi x\left(p-x\right)-\pi x^2=\pi x\left(2p-3x\right)=0$，解得 $x=\frac{2}{3}p$.

由于 $V''\left(\frac{2p}{3}\right)<0$，所以 $x=\frac{2}{3}p$ 是极小值点.

根据实际问题知 $x=\frac{2}{3}p$ 也是最小值点.

答：当矩形的边长为 $\frac{2}{3}p$ 和 $\frac{1}{3}p$ 时，绕短边所在直线旋转所得圆柱体体积最大.

2020年数学与应用数学专业专接本模拟卷（二）

一、填空题

1. -1　2. $\frac{2}{3}$　3. $y=x$　4. $(-4,2,-4)$　5. $\pi\left(e^{R^2}-1\right)$

二、单项选择题

9.B　10.C　11.A　12.C　13.D

三、判断题

17.√　18.×　19.√　20.×　21.×

四、计算题

25.解：$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\sin mx}{\ln\sin nx}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{m\cos mx}{\sin mx}}{\frac{n\cos nx}{\sin nx}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{m\cos mx}{\sin mx}\cdot\frac{\sin nx}{n\cos nx}$

$$=\frac{m}{n}\lim_{x\to0^+}\frac{\sin nx}{\sin mx}=\frac{m}{n}\lim_{x\to0^+}\frac{n\cos nx}{m\cos mx}=\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}=1.$$

26.解：$\iint\limits_D x^2+y^2\,dxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\cdot r\,dr=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{4}r^4\Big|_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}60\sin^4\theta\,d\theta$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}60\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)^2d\theta=15\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1-2\cos2\theta+\cos^2 2\theta\right)d\theta=15\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1-2\cos2\theta+\frac{1+\cos4\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=15\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{2}-2\cos2\theta+\frac{1}{2}\cos4\theta\right)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{45}{2}d\theta-15\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos2\theta\,d2\theta+\frac{15}{8}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos4\theta\,d4\theta$$

$$=\frac{45}{2}\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-15\sin2\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+\frac{15}{8}\sin4\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{45}{2}\times\frac{\pi}{6}-15\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{15}{8}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{15\pi}{4}-\frac{15}{8}\sqrt{3}.$$

五、证明题

30.证明：当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\sin x<x$恒成立，所以只需证$\sin x>\frac{2}{\pi}x$即可.

由于$\sin x>\frac{2}{\pi}x$等价于$\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}$，故令$f(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}$.

因为 $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\dfrac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)<0$（$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\tan x>x$），

所以 $f(x)$ 在 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时单调递减.

又 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{2}{\pi}=0$，

故 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，即 $\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{2}{\pi}>0$，

所以 $\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2}{\pi}$，结论得证.

六、应用题

33.解：（1）由题意知 $W=\int_L xy^2\,\mathrm{d}x+x^2y\,\mathrm{d}y$.

因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2xy$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xy$，所以 W 与路径无关.

（2）由（1）知

$W=\int_{(0,0)}^{(x_0,y_0)} xy^2\,\mathrm{d}x+x^2y\,\mathrm{d}y=\int_{L:\ y=0} xy^2\,\mathrm{d}x+x^2y\,\mathrm{d}y+\int_{L:\ x=x_0} xy^2\,\mathrm{d}x+x^2y\,\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}x_0^2y_0^2$，

当 $x_0=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$，$y_0=\sqrt{2}$ 时，F 所作的功最大，其最大值等于 $\dfrac{9}{2}$.

2020年数学与应用数学冲刺卷一
（解析几何部分）

1.直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-7}{-3}$与平面$4x-4y+mz-5=0$平行，则$m=$__$-4$__.

2.点$(1,2,2)$到直线$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$的距离是__$\frac{\sqrt{74}}{3}$__.

3.若$\left|\vec{a}\right|=2,\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3},\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{6}$，则$\angle(\vec{a},\vec{b})=$（ C ）

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{3}$　　C.$\frac{\pi}{4}$　　D.$\frac{\pi}{2}$

4.空间直线$l_1:\begin{cases}x=t+1\\y=4t-3\\z=-3t+7\end{cases}$与$\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{-8}=\frac{z-1}{6}$的位置关系是平行.（ 对 ）

5. 求通过点$(-1,2,1)$且和两平面$x+y-2z-1=0$与$x+2y-z+1=0$都平行的直线方程的坐标式参数方程.

解：两平面的法向量分别为$\vec{n}_1=\{1,1,-2\},\vec{n}_2=\{1,2,-1\}$

则直线的方向向量为$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{3,-1,1\}$

又直线过点$(-1,2,1)$，则直线方程的坐标式参数方程为$\begin{cases}x=-1+3t\\y=2-t\\z=1+t\end{cases}$.

2020年数学与应用数学冲刺卷二
（解析几何部分）

1. 曲线$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$，绕$y$轴旋转所得到的曲面方程为$\underline{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1}$.

2. 两直线$l_1:\begin{cases}x=-4+2t_1\\ y=4-t_1\\ z=-1-2t_1\end{cases}$与$l_2:\begin{cases}x=-5+4t_2\\ y=5-3t_2\\ z=5-5t_2\end{cases}$间的位置关系为（ A ）

A.异面　　B.平行　　C.重合　　D.相交

3. 计算点$(1,-2,3)$到平面$3x-4y+z=5$的距离是（ B ）

A.$\dfrac{9}{5}$　　B.$\dfrac{9\sqrt{26}}{26}$　　C.$\dfrac{9}{25}$　　D.$\dfrac{9}{26}$

4. 平面$\pi_1:Ax+By+Cz+D=0$与直线$l_1:\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$垂直的条件是$Ax+By+Cz=0$.（ 错 ）

5. 求过$(1,1,-1),(-2,-2,2),(1,-1,2)$三点的平面的点位式方程及点法式方程.

解：设$M_1(1,1,-1),M_2(-2,-2,2),M_3(1,-1,2)$

则有$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-3,-3,3\},\overrightarrow{M_1M_3}=\{0,-2,3\}$,

平面的点位式方程为$\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z+1\\ -3 & -3 & 3\\ 0 & -2 & 3\end{vmatrix}=0$

平面的法向量是$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\{-3,9,6\}$,

则点法式方程为$-3(x-1)+9(y-1)+6(z+1)=0$.

2020年数学与应用数学冲刺卷三
（解析几何部分）

1. 向量$\vec{a}=\{-4,-3,2\}$在向量$\vec{b}=\{2,2,1\}$上的射影是____-4____.

2. 直线$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{3-z}{1}$与直线$\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$ 间的距离是____$3\sqrt{2}$____.

3. 平面$\pi_1:2x-y-4z-12=0$与平面$\pi_2:\begin{cases}x=1+4u-2v\\y=4-3u-2v\\z=-2-5u+v\end{cases}$间的位置关系为（ A ）

A.相交但不垂直　　B.垂直

C.平行但不重合　　D.重合

4. 两个非零向量$\vec{a},\vec{b}$共线，则$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$成立.（ 错 ）

5. 求通过$(4,-1,2)$且与直线$\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z+1}{1}$平行的直线$l$的标准方程.

解：直线l与直线$\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z+1}{1}$平行，故$\vec{v}=\{-1,3,1\}$

又直线通过点$(4,-1,2)$，可得直线l的标准方程为$\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$.

2020 年数学与应用数学冲刺卷四
（解析几何部分）

1. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$相互垂直，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=$ ____-3____.

2. 在空间直角坐标系下，方程$y^2=2x$表示的图形是____抛物柱面____.

3. 直线$l_1:\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-3}$与平面$\pi:3x+3y-z-3=0$的夹角为（D　）

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{4}$　　C.$\frac{\pi}{3}$　　D.$\frac{\pi}{2}$

4. 平面方程$\pi:Ax+By+D=0$表示平行于xOy面的平面.（ 错 ）

5. 已知平面过点$M_1(1,-5,1)$和$M_2(3,2,-2)$，且垂直于yOz坐标面，求平面的坐标式参数方程及一般式方程.

解：垂直于yOz坐标面，即平行于x轴，平行于$\vec{i}=\{1,0,0\}$

又平行于$\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,7,-3\}$

故平面的坐标式参数方程为$\begin{cases}x=1+u+2v\\y=-5+7v\\z=1-3v\end{cases}$

平面的法向量为$\vec{n}=\vec{i}\times\overrightarrow{M_1M_2}=\{0,3,7\}$

则有$3(y+5)+7(z-1)=0$

一般式方程为$3y+7z+8=0$.

2020高等代数(一)答案.

一. 1. $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$　2. 1, 0

二. 3. B　4. D

三. 5. ×　6. ×

四. 7. (1) 二次型的矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}$

设A的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，可知

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=a$

$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4a-2b^2$

$\therefore a=1, b=\pm 2.$ (舍去-2)

(2) A的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

得A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-3$

① 将 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 代入对齐次方程，

$\begin{cases} x_1-2x_3=0 \\ -2x_1+4x_3=0 \end{cases}$ 得基础解系 $\alpha_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　$\alpha_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，即为特征值2的特征向量

② 将 $\lambda_3=-3$ 代入对应齐次方程

$\begin{cases} -4x_1-2x_3=0 \\ -5x_2=0 \\ -2x_1-x_3=0 \end{cases}$ 得基础解系 $\alpha_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$，即为特征值-3的特征向量.

显然 α_1,α_2 正交，且与 α_3 属不同的特征值，$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交.

$\therefore$ 我们只需将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化即可，不需再正交化.

$\eta_1=\frac{1}{|\alpha_1|}\alpha_1=\left(\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right)^T$

$\eta_2=\frac{1}{|\alpha_2|}\alpha_2=(0,1,0)^T$

$\eta_3=\frac{1}{|\alpha_3|}\alpha_3=\left(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right)^T$

令 $Q=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{1}{\sqrt5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt5} & 0 & -\frac{2}{\sqrt5} \end{bmatrix}$ 使 $Q^TAQ=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

则二次型标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$

8. 设向量 ξ 在两个基下有相同的坐标，记为 (k_1, k_2, k_3, k_4)

即 $\xi = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$

即 $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{记为}A}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{记为}B}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$

即 $(B-A)\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = 0$　即 $\begin{cases} k_1 + 5k_3 + 6k_4 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 6k_4 = 0 \\ -k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_3 + 2k_4 = 0 \end{cases}$　解得 $(k_1, k_2, k_3, k_4) = C\cdot(1, 1, 1, -1)$

其中 C 为任一非零实数.

五. 9(1) 显然W是$P^{n\times n}$的一个非空子集合

下面我们证明W是线性空间

对于$\forall A,B\in W$，有$A^T=A, B^T=B$

$(A+B)^T = A^T+B^T$

$= A+B$ $\quad\therefore A+B\in W$，对加法封闭

对于$k\in P$

$(kA)^T = kA^T$

$= kA$ $\quad\therefore kA\in W$，对数乘封闭.

$\therefore$ W是$P^{n\times n}$的一个线性子空间

(2) 维数为$\frac{n(n+1)}{2}$

基为$\{E_{ij} \mid E_{ij}$为第i行第j列与第j行第i行为1，其余元素为0的对称矩阵，其中$0\le i\le j\le n\}$.

10. 设A的特征值为λ，其对应特征向量为X，有

$AX=\lambda X$ (特征值/向量的定义)

$\therefore A^2X = A(\lambda X)$

$= \lambda(AX)$

$= \lambda^2 X$

$\because A^2=A$ $\quad\therefore AX=\lambda^2X$

$\lambda X=\lambda^2 X$

$\therefore$ ~~λ~~ $\lambda=0$或$\lambda=1$

2020高等代数(二)答案

一. 1. $-3M$

2. 100

二. 3. C 4. C

三. 5. √ 6. ×

四. 7. 辗转相除法

$q_2(x)=x+1$	$g(x)$	$f(x)$	
	x^2-x-1	$x^4-x^3-4x^2+4x+1$	$x^2-3=q_1(x)$
	x^2-2x	$x^4-x^3-x^2$	
	$x-1$	$-3x^2+4x+1$	
	$x-2$	$-3x^2+3x+3$	
	$r_2(x)=1$	$r_1(x)=x-2$	

我们把上述计算列出

① $f(x)=g(x)\cdot q_1(x)+r_1(x)$

② $g(x)=r_1(x)\cdot q_2(x)+r_2(x)$ $\because r_2(x)$为非0常数 $\therefore f(x)$与$g(x)$互素.

即最大公因式 $d(x)=r_2(x)=1$

由②得, $d(x)=r_2(x)=g(x)-r_1(x)\cdot q_2(x)$

$$=g(x)-q_2(x)\cdot[f(x)-g(x)\cdot q_1(x)]$$

$$=-q_2(x)\cdot f(x)+[1+q_1(x)q_2(x)]g(x)$$

$\therefore u(x)=-q_2(x)=-x-1$ $v(x)=1+q_1(x)q_2(x)=x^3+x^2-3x-2.$

8. (1) 二次型f对应的矩阵记为A

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&6&1\\2&1&t\end{bmatrix}$$

A的顺序主子式 $P_1=1>0$

$$P_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&6\end{vmatrix}=2>0$$

$$P_3=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&6&1\\2&1&t\end{vmatrix}=2t-17$$

$\therefore P_3>0$, 即 $t>\frac{17}{2}$ 时, 顺序主子式全部大于0, f是正定的

(2) $t=2$ 时

$$\begin{pmatrix}A\\ \vdots \\ E\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&6&1\\2&1&2\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&-3\\2&-3&-2\\1&-2&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-3\\0&-3&-2\\1&-2&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&-3&-\frac{13}{2}\\1&-2&-5\\0&1&\frac{3}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-\frac{13}{2}\\1&-2&-5\\0&1&\frac{3}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-26\\1&-2&-10\\0&1&3\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$\therefore B=\begin{bmatrix}1&-2&-10\\0&1&3\\0&0&2\end{bmatrix}$ 为非退化的线性替换

即 $\begin{cases}x_1=y_1-2y_2-10y_3\\ x_2=y_2+3y_3\\ x_3=2y_3\end{cases}$

标准形 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+2y_2^2-26y_3^2$ 正惯性指数为2，负惯性指数为1.

五. 9. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ ① 与向量组 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$ ② 的极大无关组分别为

$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ ③ 与 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_r$ ④.（秩相同）

$\because$ ①可由②线性表出

$\therefore$ ①可由④线性表出

$\therefore$ ③可由④线性表出，即 $\begin{cases}\alpha_1=a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2+\cdots+a_{1r}\beta_r\\ \alpha_2=a_{21}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{2r}\beta_r\\ \vdots\\ \alpha_r=a_{r1}\beta_1+a_{r2}\beta_2+\cdots+a_{rr}\beta_r\end{cases}$

设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots&a_{1r}\\a_{21}&a_{22}\cdots&a_{2r}\\ \vdots&\vdots&\vdots\\a_{r1}&a_{r2}\cdots&a_{rr}\end{bmatrix}$，上式可记为 $\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_r\end{bmatrix}$

$\because \beta_1,\beta_2\cdots\beta_r$ 线性无关 且 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 也线性无关

$\therefore$ A必为非退化矩阵，$\therefore$ ④可由③线性表出

$\therefore$ ③等价④

$\therefore$ ①与②等价，结论得证

注：（线性无关向量组 $\xrightarrow[\text{线性替换}]{\text{非退化的}}$ 线性无关向量组）

10. 反证法：设p_1+p_2是A的特征向量，且属于特征值λ.

即 $A(p_1+p_2)=\lambda(p_1+p_2)$

$=\lambda p_1+\lambda p_2$ ①

由已知可得 $A(p_1+p_2)=Ap_1+Ap_2$

$=\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2$ ②

用①-②，得 $(\lambda-\lambda_1)$[redacted]$p_1+(\lambda-\lambda_2)p_2=0$

∵ λ_1，λ_2是不同的特征值

∴ ~~$\lambda_1=\lambda_2$~~ $\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2$，与题设矛盾

∴ $\alpha_1+\alpha_2$不是A的特征向量，结论得证.