III. 模拟试卷及参考答案

河北省普通高校专科接本科教育考试

数学与应用数学专业模拟试卷

（考试时间：150 分钟）

（总分：300 分）

说明：请在答题纸的相应位置上作答，在其它位置上作答的无效。

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。请将答案填写在答题纸的相应位置上。）

1. 设 $y=x^{\sin x}$，则 $y'=$______________________.

2. 设 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$____________________.

3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\cos x}{1+\sin^2 x}dx=$________________.

4. $f(x)$的一个原函数为$\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\displaystyle\int xf'(x)dx=$__________________.

5. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，则 $a=$__________，$b=$_________.

6. 设行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$中，代数余子式$A_{21}=0$，则$a=$_________.

7. 设P、Q都是可逆矩阵，若$PXQ=B$，则$X=$.

8. 直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-3}$与平面$x+ky-3z+1=0$平行，则$k=$.

二、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个备选项中，选出一个正确的答案，并将所选项前的字母填写在答题纸的相应位置上。）

9. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right)^{n}=$（ ）.

A . e^{-2} B. 1 C. e D. e^{-1}

10. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$的敛散性是（ ）.

A. 绝对收敛 B. 条件收敛 C. 发散 D. 可能收敛，也可能发散

11. 下列级数中条件收敛的是（ ）.

A. $\sum\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{2^n}$ B. $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$

C. $\sum(\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ D. $\sum\frac{(-1)^n(\sin n+\cos n)}{n^2}$

12. 设$z=f(x,y)$是由方程$x^2+3y^2+2z^2-1=0$所确定的隐函数，则$\frac{\partial z}{\partial y}=$（ ）.

A. $-\frac{2z}{3y}$ B. $-\frac{x}{2z}$ C. $-\frac{3y}{2z}$ D. $\frac{3y}{2z}$。

13. 极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ （ ）.

A. 等于$\frac{1}{2}$ B. 等于 0 C. 等于$\frac{k}{1+k^2}$ D. 不存在

14. 下列对于多项式的结论不正确的是（ ）.

A. 如果$f(x)|g(x), g(x)|f(x)$，那么$f(x)=g(x)$

B. 如果 $f(x)|g(x), f(x)|h(x)$，那么 $f(x)|(g(x)\pm h(x))$

C. 如果 $f(x)|g(x)$，那么 $\forall h(x)\in F[x]$，有 $f(x)|g(x)h(x)$

D. 如果 $f(x)|g(x), g(x)|h(x)$，那么 $f(x)|h(x)$

15. 对于 n 阶实对称矩阵 A，以下结论正确的是（　　）.

A. 一定有 n 个不同的特征值　　　B. 存在正交矩阵 P，使 $P'AP$ 成对角形

C. 它的特征值一定是整数　　　D. 属于不同特征值的特征向量必线性无关，但不一定正交

16. 两平面 $2x-y+2z+1=0$ 与 $2x-y+2z-2=0$ 间的距离为（　　）.

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

三、判断题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。正确的划“√”，错误的划“×”，请将答案填涂在答题纸的相应位置上。）

17. 二元函数 $f(x,y)=x^2-5y^2-6x+10y+6$ 在点 $(3,1)$ 取得极值.　（　　）

18. 设 L 为不通过原点的按段光滑的闭曲线，则 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$.　（　　）

19. 若 $f(x)=\begin{cases}(1-2x)^{\frac{1}{x}}+e^x & x\neq 0\\ a^2+\cos x & x=0\end{cases}$ 是连续函数，则 $|a|=e$.　（　　）

20. 设 $f(x,y)$ 在 R^2 上连续，则 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$.　（　　）

21. 若 $f(x)$ 在 x_0 可导, 并且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0+2h)}{h}=1$，则 $f'(x_0)=-\frac{1}{4}$.　（　　）

22. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$（$s>1$）线性相关, 则存在某个向量是其余向量的线性组合.　（　　）

23. 实对称矩阵为正定的充要条件是它的所有顺序主子式都非负.　（　　）

24. 平面 $2x-y-2z-5=0$ 与 $x+3y-z-1=0$ 的位置关系为相交.　（　　）

四、计算题（本大题共 5 小题，每小题 20 分，共 100 分。请在答题纸的相应位置上作答。）

25. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数，并指出收敛域.

26. 设 D 为 xy 面上的区域：$4\le x^2+y^2\le 9$，求 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.

27. a,b 取什么值时, 方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

有解？在有解的情形下, 求一般解.

28. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为 V 的基，且线性变换 σ 在此基下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

（1）求 σ 的特征值与特征向量；

（2）σ 是否可以对角化？如果可以，求可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角形.

29. 求通过点 $M_1(1,-5,1)$ 和 $M_2(3,2,-2)$ 且垂直于 xoy 坐标面的平面的坐标式参数方程和一般方程.

五、证明题（本大题共 3 小题，每小题 20 分，共 60 分。请在答题纸的相应位置上作答。）

30. 证明函数 $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内有最小值没有最大值，并求其最小值.

31. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta$ 线性相关，

证明：β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表出，且表示法唯一.

32. 设 $A, B \in P^{n\times n}$ 是两个给定的 n 级矩阵，记 $W = \left\{ X \,\middle|\, AX = XB, X \in P^{n\times n}, \right\}$

证明：W 是线性空间 $P^{n\times n}$ 的一个子空间.

六、应用题（本大题共 1 小题，共 20 分。请在答题纸的相应位置上作答。）

33. 求曲线形构件 L：$x = a$， $y = at$， $z = \frac{1}{2}at^2$ $(0 \le t \le 1, a > 0)$ 的质量 M ，其线密度为 $\rho = \sqrt{\frac{2z}{a}}$.

数学与应用数学参考答案

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 填对得 5 分，未填或填错得 0 分）

1. $x^{\sin x}(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x)$

2. $-\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t}$

3. $\frac{\pi}{2}$

4. $\cos x-2\dfrac{\sin x}{x}+C$

5. 2, -1.

6. 3

7. $P^{-1}BQ^{-1}$

8. -5

二、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 选对得 5 分，选错、未选或多选得 0 分）

9.D 10.A 11.B 12.C 13. D 14. A 15. B 16. A

三、判断题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 填对得 5 分，未填或填错得 0 分）

17. 错 18. 错 19. 错 20. 对 21. 对 22. 对 23. 错 24. 对

四、计算题（本大题共 5 小题，每小题 20 分，共 100 分. 解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

25. 解：此幂级数的收敛半径为 $R=1$，收敛区域为 $(-1,1)$ ……………………………3 分

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$

$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\dfrac{x^4}{1-x^4}$ …………………………………… 6 分

$=-1-\dfrac{1}{4(x-1)}+\dfrac{1}{4(x+1)}+\dfrac{1}{2(x^2+1)}$ ……………………………9 分

$S(x)=\int_0^x S'(x)dx$ ……………………………………………10 分

$=\int_0^x\left(-1-\dfrac{1}{4(x-1)}+\dfrac{1}{4(x+1)}+\dfrac{1}{2(x^2+1)}\right)dx$ ……………………12 分

$=-\int_0^x dx-\dfrac{1}{4}\int_0^x\dfrac{1}{x-1}dx+\dfrac{1}{4}\int_0^x\dfrac{1}{x+1}dx+\dfrac{1}{2}\int_0^x\dfrac{1}{x^2+1}dx$ ……………15 分

$=-x-\dfrac{1}{4}\ln|x-1|+\dfrac{1}{4}\ln|x+1|+\dfrac{1}{2}\arctan x$ ……………………20 分

26. 解： 令 $x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$

在极坐标系下积分区域为 Δ : $2\le r\le 3$ $0\le\theta\le 2\pi$ ……………………4 分

所以 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\iint\limits_\Delta re^{-r^2}drd\theta$ ……………………………8 分

$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 re^{-r^2}dr$ ……………………………………………………12 分

$=\pi\int_2^3 e^{-r^2}d(r^2)$ ……………………………………………………16 分

$=\pi\left[-e^{-r^2}\right]_2^3=\pi\left(\frac{1}{e^4}-\frac{1}{e^9}\right)$ ……………………………………………………20 分

27. 解： $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&a\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&a\\0&0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}$. ……………………………………3 分

当 $a=0,b=2$ 时，$R(\overline{A})=R(A)=2$，则方程组有解. ……………………………………6 分

此时原方程组同解于

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\ \quad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\end{cases}(1),$$ ……………………………………………………8 分

(1)的导出组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\ \quad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0\end{cases}(2)$$

分别取自由未知量 x_3,x_4,x_5 为(1, 0, 0)，(0, 1, 0)，(0, 0, 1)，代入(2)则可解

得导出组的基础解系为

$\eta_1=(1,-2,1,0,0)$，$\eta_2=(1,-2,0,1,0)$，$\eta_3=(5,-6,0,0,1)$， ……………………………………16 分

再取自由未知量 x_3,x_4,x_5 为(0, 0, 0)代入(1)则可解得特解为

$\gamma_0=(-2,3,0,0,0)$， ……………………………………18 分

那么一般解为

$\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3, k_1,k_2,k_3$ 任意. ……………………………………20 分

28. 解： （1） $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$， ……………………………………4 分

所以 σ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 和 $\lambda_3=-1$. ……………………………………6 分

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$时，由$(\lambda_1 E-A)X=0$得基础解系 $X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$， $X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，…………………………8 分

故属于1的线性无关的特征向量是$\xi_1=\varepsilon_1+\varepsilon_3$　$\xi_2=\varepsilon_2$，而属于1的全部特征向量是$k_1\xi_1+k_2\xi_2$（其中k_1,k_2为不全为零的任意常数）. ……………………………………………………………………………10 分

当 $\lambda_3=-1$时，由$(\lambda_3 E-A)X=0$得基础解系$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，故属于$-1$的线性无关的特征向量是$\xi_3=-\varepsilon_1+\varepsilon_3$，

属于-1的全部特征向量是$k\xi_3$，（k为不为零的任意常数）. …………………………………… 14 分

（2）因为σ有三个线性无关的特征向量，所以σ可以对角化. ……………………………16 分

令$T=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，则$T^{-1}\mathrm{A}\mathrm{T}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$. …………………………………………20 分

29. 解：由于平面垂直于xoy面，所以它平行于z轴，即$\{0,0,1\}$与所求的平面平行，又$\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,7,-3\}$，平行于所求的平面，…………………………………………………………………………………………4 分

所以要求的平面的参数方程为：$\begin{cases}x=1+2u\\y=-5+7u\\z=1-3u+v\end{cases}$ …………………………………………………10 分

平面的点位式方程为：$\begin{vmatrix}x-1&y+5&z-1\\2&7&-3\\0&0&1\end{vmatrix}=0$……………………………………………………15 分

一般方程为：$7(x-1)-2(y+5)=0$，即$7x-2y-17=0$. ……………………………………………20 分

五、证明题（本大题共 2 小题，每小题 20 分，共 60 分. 证明过程、步骤和答案必需完整、正确）

30. 证明：$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$，…………………………………………………3 分

令 $f'(x)=0$　得$x=e^{-2}$. ……………………………………………………………………5 分

又因为当 $x\in(0,e^{-2})$ 时， $f'(x)<0$，………………………………………………………6 分

当 $x\in(e^{-2},+\infty)$ 时， $f'(x)>0$. …………………………………………………………7 分

所以 $f(x)$ 在 $x=e^{-2}$ 处取得极小值，并且 $f(e^{-2})=\dfrac{-2}{e}$. ……………………………………………………10 分

又因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个极值点，

所以 $f(x)$ 在 $x=e^{-2}$ 处取得最小值. ……………………………………………………………12 分

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}$ ………………………………………………………………14 分

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{-1}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-2\sqrt{x}\right)=0$，……………………………………………………………………16 分

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}\ln x=+\infty$. ……………………………………………………………………………18 分

所以函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内有最小值没有最大值，并且最小值是

$f(e^{-2})=\dfrac{-2}{e}$. ………………………………………………………………………………………………20 分

31. 证明：（1）由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,k_{r+1}$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta=0$$ ……………………………………………………5 分

又由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，得 $k_{r+1}\neq 0$（否则，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，矛盾），于是有

$$\beta=-\frac{k_1}{k_{r+1}}\alpha_1-\frac{k_2}{k_{r+1}}\alpha_2-\cdots-\frac{k_r}{k_{r+1}}\alpha_r\text{；}$$ ……………………………………………10 分

（2）设 $\beta=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_r\alpha_r$，$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_r\alpha_r$，则

$$c_1\alpha_1+\cdots+c_r\alpha_r=l_1\alpha_1+\cdots+l_r\alpha_r，$$

$$(c_1-l_1)\alpha_1+(c_2-l_2)\alpha_2+\cdots+(c_r-l_r)\alpha_r=0，$$ ……………………………………………17 分

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，故 $c_1-l_1=0,c_2-l_2=0,\cdots,c_r-l_r=0$，

即 $c_i=l_i$（$i=1,2,\cdots,r$）. ………………………………………………………………………………20 分

32. 证明 $\because 0\in W,\therefore W\neq\varnothing$ ……………………………………………………………………2 分

对 $\forall k\in P$，$\forall X,Y\in W$，即 $AX=XB,\ \ AY=YB$，……………………………………………………6 分

有 $A(X+Y)=XB+YB=(X+Y)B$，……12 分

$A(kX)=k(BX)=B(kX)$，……18 分

所以 $X+Y\in W$，$kX\in W$，

故 W 是线性空间 $P^{n\times n}$ 的一个子空间 …… 20 分

六、应用题（本题 20 分. 解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

33. 解：由第一型曲线积分的物理意义知

$M=\int_L\sqrt{\frac{2z}{a}}ds$ ……5 分

$=\int_0^1 t\sqrt{a^2+a^2t^2}dt$ ……10 分

$=\frac{a}{2}\int_0^1\sqrt{1+t^2}d(1+t^2)$ ……14 分

$=\frac{a}{3}\left[\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$ ……16 分

$=\frac{a}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$ ……20 分